2011年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅠA〉

第1問

〔1〕

$a=3+2\sqrt{2}$ のとき，

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=\underline{\underline{3}}-\underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$ ……ア，イ，ウ

$b=2+\sqrt{3}$ のとき，

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=\underline{\underline{2}}-\underline{\underline{\sqrt{3}}}$$ ……エ，オ

このとき，

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}-\frac{b}{a}&=a\cdot\frac{1}{b}-b\cdot\frac{1}{a}\\&=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})\\&=(6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6})-(6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})\\&=\underline{\underline{8\sqrt{2}}}-\underline{\underline{6\sqrt{3}}}\end{aligned}$$ ……カ，キ，ク，ケ

一方，$b>0$ であるから，$|2abx-a^2|<b^2$ より，

$$-b^2<2abx-a^2<b^2$$

これより，

$$a^2-b^2<2abx<a^2+b^2$$

$a>0$ であるから，

$$\frac{a^2-b^2}{2ab}<x<\frac{a^2+b^2}{2ab}\qquad\therefore\quad \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)<x<\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$ ……①

ここに，**ア〜ウ**，**エ**，**オ**より，

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}&=a\cdot\frac{1}{b}+b\cdot\frac{1}{a}=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})\\&=(6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6})+(6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})=12-4\sqrt{6}\end{aligned}$$

であるから，これと**カ〜ケ**より，①は，

$$\frac{1}{2}(8\sqrt{2}-6\sqrt{3})<x<\frac{1}{2}(12-4\sqrt{6})$$

$$\therefore\quad \underline{\underline{4\sqrt{2}}}-\underline{\underline{3\sqrt{3}}}<x<\underline{\underline{6}}-\underline{\underline{2\sqrt{6}}}$$ ……コ〜タ

〔2〕

(1)　$p:(a+b)^2+(a-2b)^2<5$

$q:|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$

において，「$q \Longrightarrow p$」に対する反例になるのは，q は満たすが p は満たさないものである。

「⓪　$a=0$，$b=0$」は q も p も満たす。

「①　$a=1$，$b=0$」は q も p も満たす。

「②　$a=0$，$b=1$」は q も p も満たさない。

「③　$a=1$，$b=1$」は q は満たすが p は満たさない。

よって，答えは，③　……チ

(2)　命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」である。

ここで，

$\overline{q}$：$|a+b| \geqq 1$ かつ $|a-2b| \geqq 2$　であるから，④　……ツ

$\overline{p}$：$(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$　であるから，⑦　……テ

(3)　(1) より，「$q \Longrightarrow p$」は偽である。

一方，「$|a+b| \geqq 1$ かつ $|a-2b| \geqq 2$」ならば，$(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 1^2+2^2=5$ となるから，「$(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$」が成り立つ。すなわち，「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は真である。

よって，その対偶である「$p \Longrightarrow q$」も真である。

以上により，

p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない。(……②)　……ト

第２問

放物線 G の式は,

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$ となるから，その軸は，$x=-\frac{b}{2a}$ ……㋐

一方,

$y=-3x^2+12bx=-3(x-2b)^2+12b^2$ より，この放物線の軸は，$x=2b$ ……㋑

いま，㋐と㋑が一致するとき，$-\frac{b}{2a}=2b$ より，$4ab=-b$

この両辺を $4b\,(\neq 0)$ で割れば,

$a=\frac{-1}{4}$ ……**アイ，ウ**

このとき G の式は，$y=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$ となるから，G が点 $(1,\ 2b-1)$ を通るとき,

$2b-1=-\frac{1}{4}\cdot 1^2+b\cdot 1+c=-\frac{1}{4}+b+c \quad \therefore \quad c=b-\frac{3}{4}$ ……**エ，オ**

以上により，G の式は,

$y=-\frac{1}{4}x^2+bx+b-\frac{3}{4}$ ……㋒

(1)　㋒より，$y=-\frac{1}{4}(x-2b)^2+b^2+b-\frac{3}{4}$ となるから，㋒の頂点の座標は,

$\left(2b,\quad b^2+b-\frac{3}{4}\right)$ ……㋓

上に凸な放物線㋒と x 軸が異なる２点で交わるとき，そのための条件は,

(㋒の頂点の y 座標) >0

すなわち,

$b^2+b-\frac{3}{4}>0 \qquad \therefore \quad 4b^2+4b-3>0$

これより,

$(2b+3)(2b-1)>0 \qquad \therefore \quad b<\frac{-3}{2},\quad \frac{1}{2}<b$ ……**カ～コ**

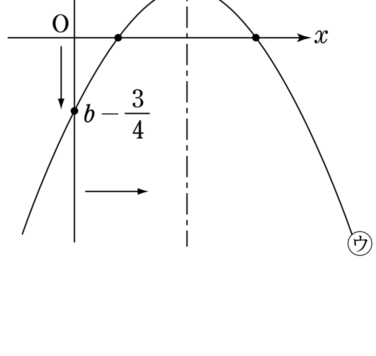
さらに，上に凸な放物線㋒と x 軸の正の部分が異なる２点で交わるとき，下図より，その条件は,

「**カ～コ**」

かつ「㋔：(㋒の軸) >0」

かつ「㋕：$x=0$ における㋒の y 座標 <0」

である。



㋔は，㋑より,

$2b>0 \qquad \therefore \quad b>0$

㋕は,

$-\frac{1}{4}\cdot 0^2+b\cdot 0+b-\frac{3}{4}=b-\frac{3}{4}<0 \qquad \therefore \quad b<\frac{3}{4}$

以上により，求める条件は，

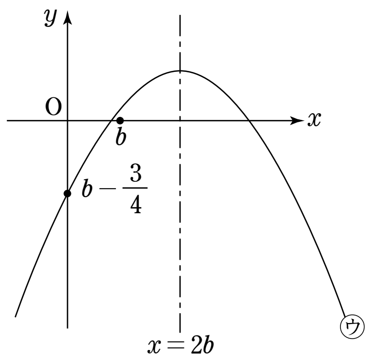
「$b<\frac{-3}{2}$，$\frac{1}{2}<b$」かつ「$b>0$」かつ「$b<\frac{3}{4}$」

であるから，答えは，

$\underline{\underline{\frac{1}{2}}}<b<\underline{\underline{\frac{3}{4}}}$　……サ，シ，ス，セ

(2)　㋒の軸は，$x=2b$ であるから，右図より，

$0\leqq x\leqq b$ における㋒の最小値は，$x=0$ のときである。



よって，$b-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$ より，

$b=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$　……ソ，タ

また，$x\geqq b$ における㋒の最大値は，$x=2b$ のときである。

よって，$-\frac{1}{4}\cdot(2b)^2+b\cdot 2b+b-\frac{3}{4}=b^2+b-\frac{3}{4}=3$ より，

$4b^2+4b-15=0$

これより，$(2b+5)(2b-3)=0$ となるから，$b>0$ より，

$b=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$　……チ，ツ

㋓より，$b=\frac{1}{2}$ のとき，G_1 の頂点の座標は

$\left(2\cdot\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)=(1,\ 0)$

$b=\frac{3}{2}$ のとき，G_2 の頂点の座標は

$\left(2\cdot\frac{3}{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)=(3,\ 3)$

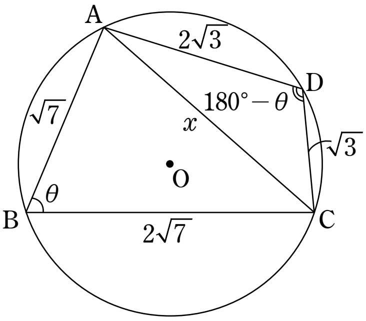
これらの座標を比べれば，$3-1=2$，$3-0=3$ より，G_1 を

x 軸方向に $\underline{\underline{2}}$，$y$ 軸方向に $\underline{\underline{3}}$　……テ，ト

だけ平行移動すれば，G_2 と一致することがわかる。

第３問

(1)　右図の $\triangle$ABC において余弦定理を用いると，



$$x^2=(\sqrt{7}\,)^2+(2\sqrt{7}\,)^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{7}\cdot\cos\theta$$

$\therefore\quad x^2=\underline{\underline{35}}-28\cos\theta$　　　　……**アイ**

また，$\triangle$ACD において余弦定理を用いると，

$$x^2=(\sqrt{3}\,)^2+(2\sqrt{3}\,)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos(180°-\theta)$$

ここに，$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ であるから，

$x^2=15+\underline{\underline{12}}\cos\theta$　　　　……**ウエ**

アイ，**ウエ**より，

$$35-28\cos\theta=15+12\cos\theta$$

$\therefore\quad\cos\theta=\dfrac{1}{\underline{\underline{2}}}$　　　　……**オ**，**カ**

よって，**アイ**より，

$x^2=35-28\cdot\dfrac{1}{2}=21\qquad\therefore\quad x=\underline{\underline{\sqrt{21}}}$　　　　……**キク**

さらに，**オ**，**カ**より，$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。円 O の半径を R とし，

$\triangle$ABC において正弦定理を用いると，

$2R=\dfrac{x}{\sin\theta}=\sqrt{21}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{7}\qquad\therefore\quad R=\underline{\underline{\sqrt{7}}}$　　　　……**ケ**

また，$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$ であるから，四角形 ABCD の面積は，

$$\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$$

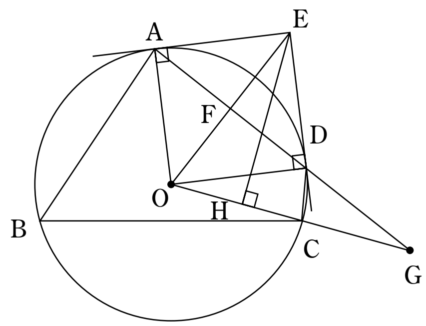
$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\cdot\sin(180°-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$=\underline{\underline{5\sqrt{3}}}$$

……**コ**，**サ**

(2)　右図において，接線の性質により，



$\angle\mathrm{OAE}=\underline{\underline{90}}°$　　　　……**シス**

さらに，OA＝OD（$=R$），また，接線の性質から，EA＝ED がいえるから，直線 EO は線分 AD の垂直二等分線である。

$\therefore\quad\angle\mathrm{AFE}=\underline{\underline{90}}°$　　　　……**セソ**

次に，$\angle AOF = \angle EOA$ (共通)，$\angle AFO = \angle EAO$ $(= 90^\circ)$ により，二角相等が成り立つから，

$\triangle AOF \backsim \triangle EOA$

$\therefore \quad AO : OF = EO : OA$

これより，

$\sqrt{7} : OF = OE : \sqrt{7} \qquad \therefore \quad OF \cdot OE = (\sqrt{7})^2 = \underline{\underline{7}}$ ……タ

さらに，前図で，$\angle GFE = \angle GHE$ であるから，円周角の定理の逆により，4 点 E，G，$\underline{\underline{H}}$，$\underline{\underline{F}}$ は同一円周上にある。よって，$\underline{\underline{②}}$ ……チ

したがって，この円において方べきの定理を用いると，タより，

$OH \cdot OG = OF \cdot OE = \underline{\underline{7}}$ ……ツ

第４問

1個のさいころを投げるとき，目の出方は1から6までの6通りあり，これらは同様に確からしい。

このとき，4以下の目が出る場合は4通りあるから，

$$p=\frac{4}{6}=\frac{\underline{\underline{2}}}{\underline{\underline{3}}}$$ ……ア，イ

5以上の目が出る場合は4以下の目が出る場合の余事象であるから，

$$q=\frac{2}{6}=\frac{\underline{\underline{1}}}{\underline{\underline{3}}}$$ ……ウ，エ

(1)　まず，8回の中で4以下の目が3回，5以上の目が5回出る確率を求めればよい。

8回のうちのどの3回に4以下の目が出るかを考えて，求める確率は，

$${}_8C_3\cdot p^3q^5=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot p^3q^5=\underline{\underline{56}}p^3q^5$$ ……オカ

次に，第1回目に4以下の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目が2回，5以上の目が5回出る確率を求めればよい。

第2回目以降の7回のうちのどの2回に4以下の目が出るかを考えて，求める確率は，

$$p\cdot{}_7C_2\cdot p^2q^5=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\cdot p^3q^5=\underline{\underline{21}}p^3q^5$$ ……キク

さらに，第1回目に5以上の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目が3回，5以上の目が4回出る確率を求めればよい。

第2回目以降の7回のうちのどの3回に4以下の目が出るかを考えて，求める確率は，

$$q\cdot{}_7C_3\cdot p^3q^4=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot p^3q^5=\underline{\underline{35}}p^3q^5$$ ……ケコ

(2)　**オカ** $={}_8C_3$ であるから，「異なる8個から3個を選ぶ組合せの総数」と等しくなるものを求めればよい。

「異なる8個から3個を選ぶ」ことを，8個のうち特定の1個を選ぶか選ばないかに分けて考えると，

・特定の1個を選ぶ場合，残りの7個から2個を選べばよいから，その場合の数は，
　${}_7C_2$　（通り）

・特定の1個を選ばない場合，残りの7個から3個を選べばよいから，その場合の数は，${}_7C_3$　（通り）

「異なる8個から3個を選ぶ」ことは，上の2つの場合に限られ，しかもこれらは互いに排反であるから，

${}_8C_3={}_7C_2+{}_7C_3$　（……$\underline{\underline{2}}$） ……サ

次に，${}_7C_2={}_7C_{7-2}={}_7C_5$，${}_7C_3={}_7C_{7-3}={}_7C_4$ であるから，

${}_8C_3={}_7C_5+{}_7C_4$　（……$\underline{\underline{6}}$） ……シ

(3)　得点が 6 点となる場合は，第 1 回目から第 5 回目まではすべて 5 以上の目が出て，第 6 回目から第 8 回目まではすべて 4 以下の目が出る場合であるから，その確率は，

$q^5 \cdot p^3 = \underline{\underline{p^3 q^5}}$　……ス，セ

次に，得点が 3 点となる場合は，第 1 回目と第 2 回目には 5 以上の目が出て，第 3 回目に初めて 4 以下の目が出て，第 4 回目以降の 5 回のうち 2 回は 4 以下の目が，3 回は 5 以上の目が出る場合である。

よって，その確率は，

$q^2 \cdot p \cdot ({}_5\mathrm{C}_2 \cdot p^2 q^3) = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot p^3 q^5 = \underline{\underline{10}}\, p^3 q^5$　……ソタ

さらに，これと同様に，得点が k 点 ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$) となる確率は，

$q^{k-1} \cdot p \cdot \{{}_{8-k}\mathrm{C}_2 \cdot p^2 q^{(8-k)-2}\} = {}_{8-k}\mathrm{C}_2 \cdot p^3 q^5$

であるから，得点の期待値は，

$$(1 \cdot {}_{8-1}\mathrm{C}_2 + 2 \cdot {}_{8-2}\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_{8-3}\mathrm{C}_2 + 4 \cdot {}_{8-4}\mathrm{C}_2 + 5 \cdot {}_{8-5}\mathrm{C}_2 + 6 \cdot {}_{8-6}\mathrm{C}_2) \cdot p^3 q^5$$

$$= (1 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 + 2 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 + 4 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 + 5 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 + 6 \cdot {}_2\mathrm{C}_2) \cdot p^3 q^5$$

$$= \left(1 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} + 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} + 4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + 5 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} + 6 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$= (21 + 30 + 30 + 24 + 15 + 6) \cdot \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{1}{3^5}$$

$$= 126 \cdot \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{1}{3^5} = \underline{\underline{\frac{112}{729}}}$$　……チ～ニ