2011年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅡB〉

第１問

〔１〕

$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とおくと，

$$t^2=\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$$

$$=\underline{\underline{2}}\cos^2\theta+\underline{\underline{2\sqrt{3}}}\sin\theta\cos\theta+\underline{\underline{1}}$$ ……ア～エ

であるから，

$$y=\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta-2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta$$

$$=2\cos^2\theta-1+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$$

$$=t^2-2-2t$$

$$=t^2-\underline{\underline{2}}t-\underline{\underline{2}}$$ ……オ，カ

となる。

また，

$$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$

$$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\underline{\underline{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\underline{\underline{3}}}\right)$$ ……キ，ク

である。

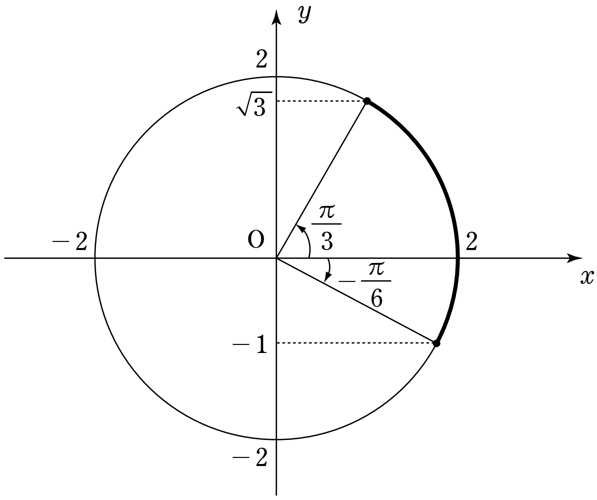
ここで，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ より，

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{3}$$

すなわち，

$$-\frac{\pi}{\underline{\underline{6}}}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{3}$$ ……ケ

である。



よって，$t=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとり得る値の範囲は

$\underline{\underline{-1}} \leqq t \leqq \underline{\underline{\sqrt{3}}}$ ……コサ，シ

である。

このとき，y は

$y=(t-1)^2-3$

と変形されるから，y は $t=\underline{\underline{1}}$ のとき， ……ス

すなわち，

$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1 \iff \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\iff \theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

より，

$\theta=-\dfrac{\pi}{\underline{\underline{6}}}$ ……セ

のとき，最小値 $\underline{\underline{-3}}$ をとる。 ……ソタ

〔2〕

$X=\log_2 x$ とおくと，

$$\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{1}{2}X$$

$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{1}{2}X$$

であるから，①式より，

$$12\left(\frac{1}{2}X\right)^2-7\cdot\frac{1}{2}X-10>0$$

$$3X^2-\frac{7}{2}X-10>0$$

よって，

$6X^2-\underline{\underline{7}}X-\underline{\underline{20}}>0$ ……チ，ツテ

であるから，これを解くと

$(3X+4)(2X-5)>0$

$X<-\dfrac{4}{\underline{\underline{3}}}，\dfrac{5}{\underline{\underline{2}}}<X$ ……ト～ヌ

となる。

このとき，

$\log_2 x<-\dfrac{4}{3}，\dfrac{5}{2}<\log_2 x$

すなわち，

$x<2^{-\frac{4}{3}}，2^{\frac{5}{2}}<x$

となる。

よって，$2^{-\frac{4}{3}}<1$ より，条件①を満たす最小の自然数 x は

$2^{\frac{5}{2}}<x$

を満たす最小の自然数 x である。

ゆえに，

$5=\sqrt{25}<\sqrt{32}=2^{\frac{5}{2}}<\sqrt{36}=6$

であるから，求める最小の自然数 x は $\underline{\underline{6}}$ である。 ……ネ

次に，条件②を満たす最大の自然数 x について考える。

②の左辺は単調増加であり，明らかに $x\leqq 13$ であるから，左辺の x に $x=13，12，11$ ……と代入していき，初めて②を満たす自然数 x が求めるものである。

$x=13$ のとき

$x+\log_3 x=13+\log_3 13>13+\log_3 3=14$　より②を満たさない。

$x=12$ のとき

$x+\log_3 x=12+\log_3 12>12+\log_3 9=14$　より②を満たさない。

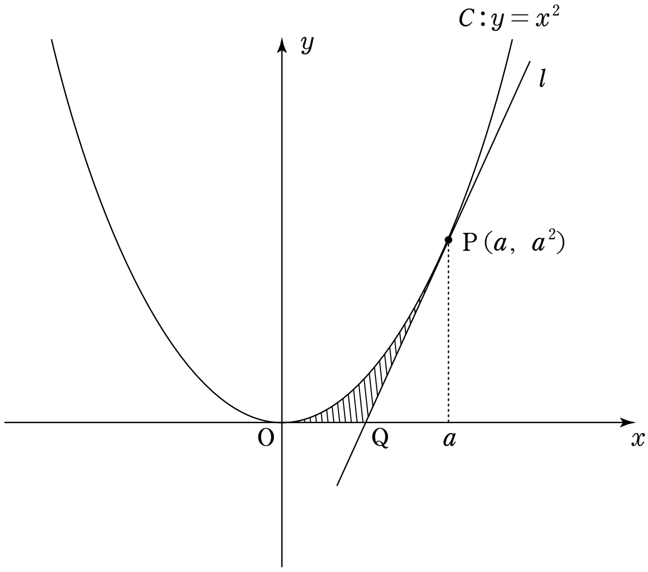
$x=11$ のとき

$x+\log_3 x=11+\log_3 11<11+\log_3 27=14$　より②を満たす。

以上より，②を満たす最大の自然数 x は $\underline{\underline{11}}$ である。 ……ノハ

（$6\leqq 11$ よりこれは①も満たす。）

第2問



$y=x^2$ より，$y'=2x$

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線 l の方程式は，

$y-a^2=2a(x-a)$

$y=\underline{\underline{2a}}x-a^{\underline{\underline{2}}}$ ……アイ，ウ

点 Q の x 座標は，$y=0$ より，

$2ax-a^2=0$

よって，$a \neq 0$ より，

$$x=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$$

すなわち，Q の座標は，

$$\left(\underline{\underline{\frac{a}{2}}},\ \underline{\underline{0}}\right)$$ ……エ，オ，カ

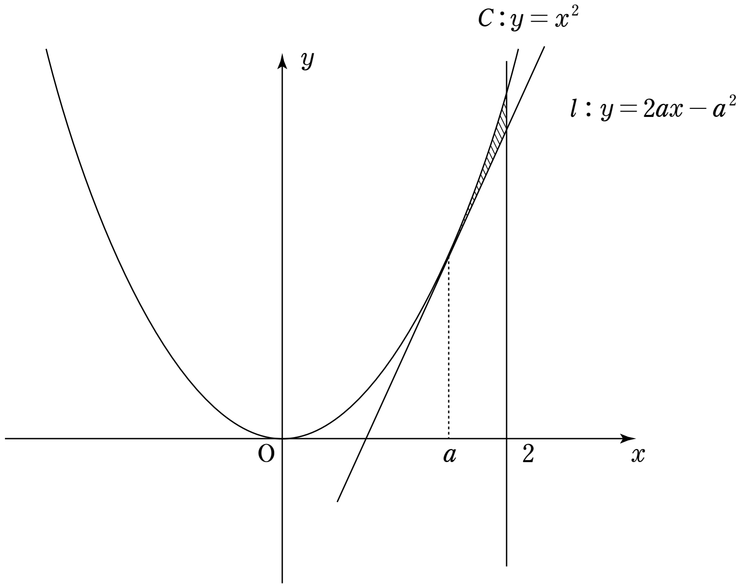
である。

次に，$a>0$ として求める面積 S は，上図より

$$S=\int_0^a x^2\,dx-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)\cdot a^2$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a-\frac{1}{4}a^3$$

$$=\underline{\underline{\frac{a^3}{12}}}$$ ……キ，クケ



また，$a < 2$ のとき，面積 T は，

$$T = \int_a^2 \left\{x^2 - (2ax - a^2)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x\right]_a^2$$

$$= -\frac{a^3}{\underline{\underline{3}}} + \underline{\underline{2}}a^2 - \underline{\underline{4}}a + \frac{8}{\underline{\underline{3}}}$$ ……**コ～セ**

である。

$0 \leqq a \leqq 2$ として，

$$U = S + T$$

$$= \frac{a^3}{12} + \left(-\frac{a^3}{3} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}$$

$U = U(a)$ とおくと，

$$U'(a) = -\frac{3}{4}a^2 + 4a - 4$$

$$= -\frac{1}{4}(3a^2 - 16a + 16)$$

$$= -\frac{1}{4}(3a - 4)(a - 4)$$

よって，増減表は，

a	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$U'(a)$		$-$	0	$+$	
$U(a)$	$\frac{8}{3}$	↘	最小	↗	$\frac{2}{3}$

$$U(0)=\frac{8}{3},\quad U(2)=\frac{2}{3}$$

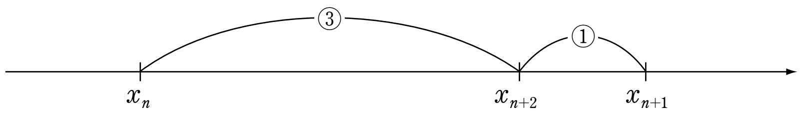
$$\begin{aligned}U\left(\frac{4}{3}\right)&=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^3+2\left(\frac{4}{3}\right)^2-4\cdot\frac{4}{3}+\frac{8}{3}\\&=-\frac{1}{4}\cdot\frac{64}{27}+2\cdot\frac{16}{9}-\frac{16}{3}+\frac{8}{3}\\&=\frac{8}{27}\end{aligned}$$

よって，U は

$a=\underline{0}$ のとき最大値 $\underline{\underline{\frac{8}{3}}}$ をとり，

$a=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$ のとき最小値 $\underline{\underline{\frac{8}{27}}}$ をとる。　　……ソ～ニ

第3問



$x_1=1$，$x_2=2$ であり，x_3 は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ を $3:1$ に内分する点の座標であるから，

$$x_3=\frac{x_1+3x_2}{3+1}=\frac{1\cdot1+3\cdot2}{4}$$

$$=\frac{7}{4} \qquad \cdots\cdots ア，イ$$

である。

同様に，

$$x_{n+2}=\frac{1\cdot x_n+3\cdot x_{n+1}}{3+1}=\frac{3x_{n+1}+x_n}{4}$$

である。

ここで，階差数列 $\{y_n\}$ は，

$$y_1=x_2-x_1=2-1$$

$$=1 \qquad \cdots\cdots ウ$$

$$y_{n+1}=x_{n+2}-x_{n+1}$$

$$=\frac{3x_{n+1}+x_n}{4}-x_{n+1}$$

$$=\frac{-1}{4}(x_{n+1}-x_n)$$

$$=\frac{-1}{4}y_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots エオ，カ$$

である。

よって，$\{y_n\}$ は初項 1，公比 $-\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから，

$$y_n=1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\quad (\cdots\cdots ⓪) \qquad \cdots\cdots キ$$

である。

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}y_k$$

$$=1+\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$=1+\frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} \qquad (\cdots\cdots 0)$$ ……ク～サ

となる。（これは $n=1$ のときも $x_1=1$ となって成り立つ。）

次に，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,|y_k|=\sum_{k=1}^{n}k\left|\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\left|\frac{-1}{4}\right|^{k-1} \qquad \left(\ r=\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4}\text{ とおく }\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}$$

であるから，

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & 1+2r+3r^2+\cdots\cdots+nr^{n-1} \\ -) & rS_n = & \quad\ r+2r^2+\cdots\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n \\ \hline & S_n-rS_n = & 1+\ r+\ r^2+\cdots\cdots+r^{n-1} \qquad -nr^n \end{array}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-nr^{n} \qquad (\cdots\cdots 1,\ 1)$$ ……シ，ス

よって，$r\neq 1$ より，

$$(1-r)S_n=\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n$$

であり，

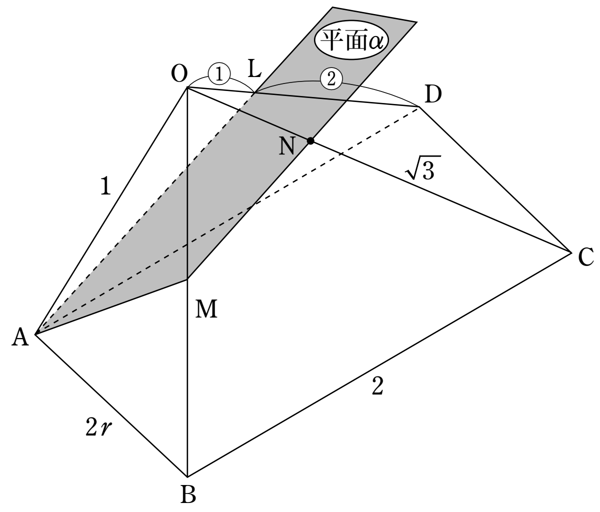
$$S_n=\frac{1-r^n}{(1-r)^2}-\frac{n}{1-r}r^n \quad \left(r=\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (\cdots\cdots 1,\ 0)$$ ……セ～ナ

となる。

第４問



上図から，

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$
$$=\underline{\underline{\vec{a}}}-\underline{\underline{\vec{b}}}+\vec{c}$$
……ア，イ

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OL}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$
$$=-\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$
$$=-\frac{2}{\underline{\underline{3}}}\vec{a}-\frac{1}{\underline{\underline{3}}}\vec{b}+\frac{1}{\underline{\underline{3}}}\vec{c}$$
……ウ～カ

となる。

次に，点 N は 3 点 A，L，M の定める平面 α 上にあるから，

$$\overrightarrow{AN}=s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AM}\ (s,\ t\ \text{は実数})$$

と表される。

よって，

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}$$
$$=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AL}+t(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)$$
$$=\left(\underline{\underline{1}}-\frac{2}{\underline{\underline{3}}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\underline{\underline{3}}}+\frac{t}{\underline{\underline{2}}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\underline{\underline{3}}}\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$
……キ～シ

となる。

一方，点 N は辺 OC 上にあることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = m\overrightarrow{\mathrm{OC}} = m\vec{c}\ （m \text{ は実数}）\quad \cdots\cdots②$$

と表される。

4点O，A，B，Cは同一平面上にないから，①，②より

$$\begin{cases} 1-\dfrac{2}{3}s-t=0 \\ -\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}=0 \\ \dfrac{s}{3}=m \end{cases}$$

これより，

$$m=\frac{1}{4}\quad \left(s=\frac{3}{4},\ t=\frac{1}{2}\right)$$

すなわち，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{\underline{\underline{4}}}\vec{c}\qquad\cdots\cdots\text{ス，セ}$$

となる。

また，△OABに余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{1^2+1^2-(2r)^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{2-4r^2}{2}$$
$$=1-2r^2$$

となるから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=1\cdot1\cdot(1-2r^2)=\underline{\underline{1}}-\underline{\underline{2}}r^2\qquad\cdots\cdots\text{ソ，タ}$$

である。

さらに，$\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2=\mathrm{BC}^2$ であるから，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

よって，

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}=\underline{\underline{0}}\qquad\cdots\cdots\text{チ}$$

である。

△OACに余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{AOC}=\frac{1^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{4+4r^2})^2}{2\cdot1\cdot\sqrt{3}}\quad（\mathrm{AC}=\sqrt{4+4r^2}\ \text{より}）$$
$$=\frac{-4r^2}{2\sqrt{3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2$$

となるから，

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{AOC}=1\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2\right)=\underline{\underline{-2}}r^2\qquad\cdots\cdots\text{ツテ}$$

である。

ここで,

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})$$
$$=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=0-\frac{1}{4}\cdot 1^2-\frac{1}{4}\cdot(-2r^2)+\frac{1}{2}(1-2r^2)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r^2$$

である。

直線 AM と直線 MN が垂直になるのは, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$ となるときで

$$r^2=\frac{1}{2}\quad より\quad r=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

すなわち,

$$\mathrm{AB}=2r=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}$$ ……ト

のときである。