Ⓢ

数　学 ①　**数学Ⅰ**

（100点
60分）

この問題冊子には，**「数学Ⅰ」「数学Ⅰ・数学A」**の２科目を掲載しています。解答する科目を間違えないよう選択しなさい。

Ⅰ　注　意　事　項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出 題 科 目	ペ ー ジ	選　択　方　法
数　学　Ⅰ	4〜11	左の２科目のうちから１科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅰ・数学A	12〜19	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

受験番号（数字及び英字）**を記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄，試験場コード欄**

氏名・フリガナ及び**試験場コード**（数字）を**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

解答する科目を一つ選び，科目の下の ○ に**マーク**しなさい。**マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点**となります。

5　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

Ⅱ　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号（－，±）又は数字（0～9）が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	● ⊕ ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ● ⑨
ウ	⊖ ⊕ ⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

5　根号を含む分数形で解答する場合，例えば $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけません。

数　　学　　I

（全　問　必　答）

第１問 （配点　25）

〔1〕　$a = 3 + 2\sqrt{2}$，$b = 2 + \sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\frac{1}{b} = \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。このとき，不等式

$$|2abx - a^2| < b^2$$

を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}} < x < \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

〔2〕 n を自然数とし

$$A = n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 2$$

とおく。

$$n^4 + 3n^2 + 2 = \left(n^2 + \boxed{\text{チ}}\right)\left(n^2 + \boxed{\text{ツ}}\right)$$

であるから

$$A = \left(n^2 + \boxed{\text{テ}}\right)\left(n^2 - \boxed{\text{ト}}\,n + \boxed{\text{ナ}}\right)$$

となる。ただし，$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ の解答の順序は問わない。

さらに

$$n^2 - \boxed{\text{ト}}\,n + \boxed{\text{ナ}} = \left(n - \boxed{\text{ニ}}\right)^2 + \boxed{\text{ヌ}}$$

である。

したがって，$A < 1000$ を満たす最大の n は $\boxed{\text{ネ}}$ であり，このときの A の素因数分解は

$$A = \boxed{\text{ノ}} \times \boxed{\text{ハヒ}} \times \boxed{\text{フヘ}}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{ハヒ}}$ と $\boxed{\text{フヘ}}$ の解答の順序は問わない。

第2問 （配点 25）

a，b，c を定数とし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする。x の2次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき

$$a = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。さらに，G が点$(1,\ 2b-1)$を通るとき

$$c = b - \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

以下，②，③ のとき，2次関数 ① とそのグラフ G を考える。

（数学 I 第2問は次ページに続く。）

(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}},\qquad \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}} < b$$

である。さらに，G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} < b < \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

である。

(2) $b > 0$ とする。

$0 \leqq x \leqq b$ における 2 次関数 ① の最小値が $-\frac{1}{4}$ であるとき，

$b = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ である。一方，$x \geqq b$ における 2 次関数 ① の最大値が 3 であるとき，$b = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

$b = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$，$b = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ のときの ① のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。G_1 を x 軸方向に $\boxed{テ}$，y 軸方向に $\boxed{ト}$ だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。

第３問 （配点　25）

点 O を中心とする円 O の円周上に 4 点 A，B，C，D がこの順にあり，

$$AB = 2,\ CD = 2\sqrt{3},\ BD = 2\sqrt{3},\ AC = 4$$

であるとする。

(1)　$\angle BAC = \theta$，$BC = x$ とおくと，△ABC に着目して

$$x^2 = \boxed{\text{アイ}} - 16\cos\theta$$

となる。また，△BCD に着目して

$$x^2 = 24 - \boxed{\text{ウエ}}\cos\theta$$

となる。よって，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$x = \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であり，円 O の半径は $\boxed{\text{ケ}}$ である。また，△ABC の面積は $\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

（数学Ⅰ第３問は次ページに続く。）

(2) 点Oを中心とする半径 $\boxed{\text{ケ}}$ の球を考える。点Pを，この球面上の点で三角錐(すい)PABCの体積が最大となるような点とする。

このとき，三角錐PABCの体積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ であり，

PA $= \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

さらに，点Pを中心とし，三角錐PABCを含む最小の球の表面積は $\boxed{\text{チツ}}\pi$ である。

第4問 (配点 25)

a, bは正の実数で, $\dfrac{a}{b}$は整数でないとする。$\dfrac{a}{b}$をこえない最大の整数をm, $\dfrac{b}{a-bm}$をこえない最大の整数をnとする。すなわちm, nは

$$m < \frac{a}{b} < m+1, \qquad n \leqq \frac{b}{a-bm} < n+1$$

を満たす整数である。

(1) $a=17$, $b=3$のとき, $m=$ $\boxed{ア}$, $n=$ $\boxed{イ}$ である。

(2) $a=20$, $b=\sqrt{2}$のとき, $m=$ $\boxed{ウエ}$, $n=$ $\boxed{オ}$ である。

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

(3) $\dfrac{9}{4} < \dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{7}{3}$ であるとき，$m = \boxed{\text{カ}}$ であるから，$\dfrac{a}{b} - m$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} < \frac{a}{b} - m \leqq \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

となる。よって，$\dfrac{b}{a - bm}$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{サ}} \leqq \frac{b}{a - bm} < \boxed{\text{シ}}$$

となり，$n = \boxed{\text{ス}}$ と定まる。

(4) $m = n = 2$ となるときの $\dfrac{a}{b}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < \frac{a}{b} \leqq \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。