2012 年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅠA〉

第１問

〔１〕

(1) $|2x+1| \leqq 3$ より，$-3 \leqq 2x+1 \leqq 3$

これより，$-4 \leqq 2x \leqq 2$

よって，$\underline{\underline{-2}} \leqq x \leqq \underline{\underline{1}}$ ……アイ，ウ

(2) $a>0$ であるから，

$|2x+1| \leqq a$ より，$-a \leqq 2x+1 \leqq a$

これより，$-1-a \leqq 2x \leqq -1+a$

よって，$\underline{\underline{\dfrac{-1-a}{2}}} \leqq x \leqq \dfrac{-1+a}{2}$ ……①′ ……エ，オ

(3) $a=3$ のとき，①′ は，$-2 \leqq x \leqq 1$

これを満たす整数 x は，-2，-1，0，1 であるから，$N=\underline{\underline{4}}$ ……カ

$a=4$ のとき，①′ は，$-\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

これを満たす整数 x は，-2，-1，0，1 であるから，$N=4$

$a=5$ のとき，①′ は，$-3 \leqq x \leqq 2$

これを満たす整数 x は，-3，-2，-1，0，1，2 であるから，$N=6$

よって，N が初めて 4 より大きくなるのは，$a=\underline{\underline{5}}$ のときである。 ……キ

〔２〕

(1) p：$m>k$ または $n>k$ の否定は，

$\overline{m>k}$ かつ $\overline{n>k}$

すなわち，$m \leqq k$ かつ $n \leqq k$ であるから，$\underline{\underline{②}}$ ……ク

(2) (i) $k=1$ のとき，m，n が自然数であることに注意すると，条件 p，q は

p：$m \geqq 2$ または $n \geqq 2$

q：$mn \geqq 2$

と書き換えることができる。

p が成り立つとき，$mn \geqq 2\cdot1=2$ であるから，「p ならば q」は真である。

一方，$\overline{p}$ は「$m=n=1$」，$\overline{q}$ は「$mn=1$」であるから，「$\overline{p}$ ならば $\overline{q}$」は真である。

よって，この対偶である「q ならば p」も真である。

以上により，p は q であるための必要十分条件である。(……$\underline{\underline{⓪}}$) ……ケ

(ii)　$k=2$ のとき，(i) と同様に，条件 p，q は

p：$m \geqq 3$ または $n \geqq 3$

q：$mn \geqq 5$

r：$mn \geqq 3$

と書き換えることができる。

p が成り立つとき，$mn \geqq 3\cdot 1=3$ であるから，「p ならば r」は真である。

一方，「r ならば p」は偽である (反例：$m=n=2$)。

以上により，p は r であるための十分条件であるが，必要条件でない。(……②)

……コ

次に，「p ならば q」は偽である (反例：$m=3$，$n=1$)。

一方，$\overline{p}$ は「$m \leqq 2$ かつ $n \leqq 2$」，$\overline{q}$ は「$mn \leqq 4$」であるから，「$\overline{p}$ ならば $\overline{q}$」は真である。

よって，この対偶である「q ならば p」も真である。

以上により，p は q であるための必要条件であるが，十分条件でない。(……①)

……サ

第2問

$$\begin{aligned} y &= -x^2+(2a+4)x+b \quad \cdots\cdots① \\ &= -x^2+2(a+2)x+b \\ &= -\{x-(a+2)\}^2+(a+2)^2+b \\ &= -\{x-(a+2)\}^2+a^2+4a+b+4 \end{aligned}$$

よって，①のグラフ G の頂点の座標は，

$(a+\underline{2},\ a^2+\underline{4}a+b+\underline{4})$ ……ア，イ，ウ

この頂点が $y=-4x-1$ 上にあるとき，

$a^2+4a+b+4=-4(a+2)-1$

これを b について解くと，

$b=-a^2-\underline{8}a-\underline{13}$ ……㋐ ……エ，オカ

(1)　グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるための条件は，G が上に凸な放物線であることから，

(G の頂点の y 座標)>0

ここで，㋐のとき，G の頂点の y 座標は，

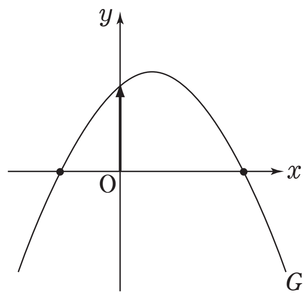
$a^2+4a+(-a^2-8a-13)+4=-4a-9$

であるから，

$-4a-9>0$ より，$a<\dfrac{-9}{\underline{4}}$ ……キク，ケ

また，G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるための条件は，

右図より，



(G の y 切片)>0

ここで，G の y 切片は㋐であるから，

$-a^2-8a-13>0$

これより，$a^2+8a+13<0$ ……㋑

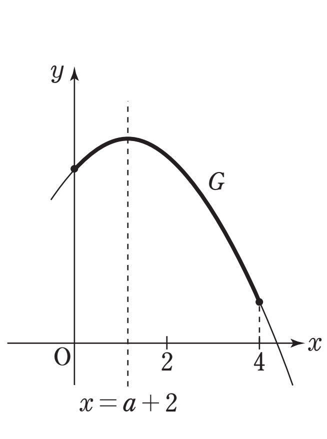
$a^2+8a+13=0$ の解は，

$a=-4\pm\sqrt{3}$

であるから，㋑は，

$-\underline{4}-\underline{\sqrt{3}}<a<-4+\sqrt{3}$ ……コ，サ

(2)　①の右辺を $f(x)$ とおく。すなわち㋐とから，



$f(x)=-x^2+(2a+4)x-a^2-8a-13$

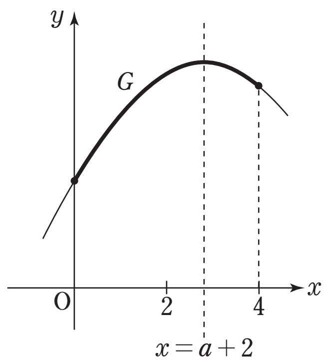
$y=f(x)$ の軸：$x=a+2$ の位置によって場合を分けると，

・$a+2\leqq 2$ すなわち $a\leqq 0$ のとき，G は右図のようになるから，①の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値は，

$f(4)=-a^2-13=-22$

これより，$a^2=9$

$a\leqq 0$ より，$a=\underline{-3}$ ……シス



・$a+2\geqq 2$ すなわち $a\geqq 0$ のとき，G は右図のようになるから，①の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値は，

$f(0)=-a^2-8a-13=-22$

これより，$a^2+8a-9=0$

$(a+9)(a-1)=0$

$a\geqq 0$ より，$a=\underline{\underline{1}}$ ……セ

また，$a=1$ のとき，

$f(x)=-x^2+6x-22$

$=-(x-3)^2-13$ ……㋒

であるから，①の $0\leqq x\leqq 4$ における最大値は，$f(3)=\underline{\underline{-13}}$ ……ソタチ

一方，$a=-3$ のとき，

$f(x)=-x^2-2x+2$

$=-(x+1)^2+3$

で，このとき $y=f(x)$ の頂点の座標は，

$(-1,\ 3)$ ……㋓

また，$a=1$ のとき $y=f(x)$ の頂点の座標は，㋒より，

$(3,\ -13)$ ……㋔

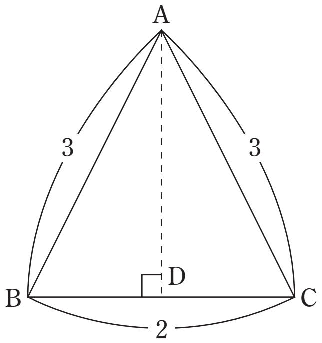
であるから，㋓から㋔へ

x 軸方向に　$3-(-1)=\underline{\underline{4}}$ ……ツ

y 軸方向に　$-13-3=\underline{\underline{-16}}$ ……テトナ

だけ平行移動すれば，一致することがわかる。

第３問



$\triangle$ABC は右図のようになり，A から BC に引いた垂線を AD とすると，D は BC の中点であるから，

$$\mathrm{BD}=1$$

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BD}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$$

よって，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{3},\ \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ ……ア～オ

(注) 余弦定理を用いて cos ∠ABC を求めたあと，三角比の相互関係を用いて sin ∠ABC を求めてもよい。

$\triangle$ABC の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$ ……カ，キ

$\triangle$ABC の内心を I とすると，I は，∠ABC の二等分線と AD との交点であり，内接円 I の半径は ID である。

角の二等分線の性質より，

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=3:1$$

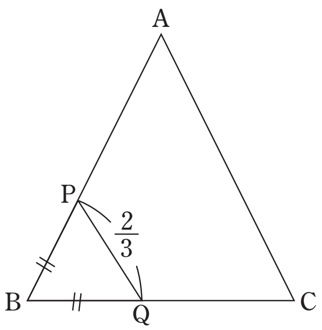
であるから，

$$\mathrm{ID}=\frac{1}{3+1}\mathrm{AD}=\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ……ク，ケ

よって，

$$\mathrm{IB}=\sqrt{\mathrm{ID}^2+\mathrm{BD}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$ ……コ，サ



(1)　P，Q は右図のようにとれるから，$\triangle$PBQ の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，直径は，

$$2R=\frac{\mathrm{PQ}}{\sin\angle\mathrm{PBQ}}$$

$$=\frac{\mathrm{PQ}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ……シ，ス

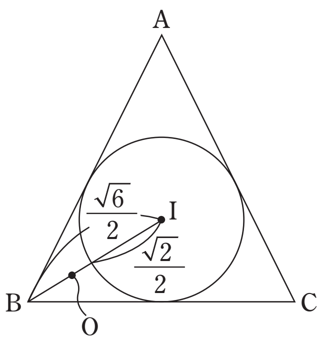
　ここで，$\triangle$PBQ の外接円の中心を O とすると，O は線分 BI 上にあり，また円 I の周も線分 BI と交わる。

　そこで，円 O の直径と円 I の半径の和と線分 BI の長さを比べると，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

で，$2>\dfrac{3}{2}$ であるから，

(円 O の直径)＋(円 I の半径)＞BI



よって，円 I と円 O は異なる 2 点で交わる。（……③）　……セ

(2)　E，F は右図のようにとれるから，
円 I における方べきの定理より，

$\mathrm{CE} \cdot \mathrm{CF} = \mathrm{CD}^2$

これより，

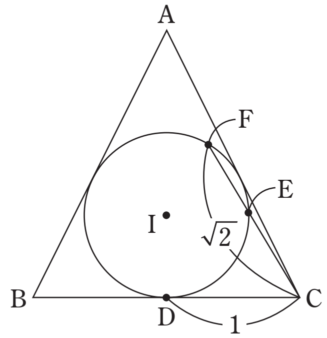
$\sqrt{2}\,\mathrm{CE} = 1^2$

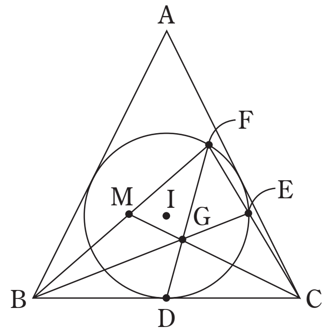
よって，$\mathrm{CE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　……ソ，タ

これより，$\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CE}} = \left(\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 1$　……チ

さらに，点 G，M は右図のようにとれるが，D，E はそれぞれ BC，CF の中点であるから，G は △FBC の重心である。

よって，$\dfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CG}} = \dfrac{1}{2}$ である。　……ツ，テ





第4問

9枚のカードから5枚をとる組合せを求めると，

$${}_9\mathrm{C}_5 = {}_9\mathrm{C}_4 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \underline{\underline{126}}\ (\text{通り})$$ ……アイウ

(1)　取り出した5枚の中に $\boxed{5}$ (5と書かれたカード)がある取り出し方は，$\boxed{5}$ 以外の8枚のカードから4枚をとる組合せを求めて，

$${}_8\mathrm{C}_4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \underline{\underline{70}}\ (\text{通り})$$ ……エオ

よって，$\boxed{5}$ がない取り出し方は，

$$126-70=\underline{\underline{56}}\ (\text{通り})$$ ……カキ

(2)　得点が0点となるのは，$\boxed{5}$ がない場合であるから，求める確率は，

$$\frac{56}{126}=\frac{4}{\underline{\underline{9}}}$$ ……ク，ケ

得点が1点となるのは，$\boxed{5}$〜$\boxed{9}$ の5枚を取り出す場合であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{\underline{\underline{126}}}$$ ……コ，サシス

得点が2点となるのは，$\boxed{5}$ のほか，$\boxed{1}$〜$\boxed{4}$ から1枚，$\boxed{6}$〜$\boxed{9}$ から3枚を取り出す場合であるから，求める確率は，

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{126}=\frac{4\cdot4}{126}=\frac{8}{\underline{\underline{63}}}$$ ……セ，ソタ

得点が3点となるのは，$\boxed{5}$ のほか，$\boxed{1}$〜$\boxed{4}$ から2枚，$\boxed{6}$〜$\boxed{9}$ から2枚を取り出す場合であるから，求める確率は，

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{126}=\frac{6\cdot6}{126}=\frac{2}{\underline{\underline{7}}}$$ ……チ，ツ

さらに，得点が4点，5点となる確率を求めると，それぞれ，

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{126}=\frac{4\cdot4}{126}=\frac{8}{63}$$

$$\frac{1}{126}$$

であり，これですべての場合を考えたことになる。

よって，求める得点の期待値は，

$$0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{1}{126}+2\cdot\frac{8}{63}+3\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{8}{63}+5\cdot\frac{1}{126}$$

$$=\frac{1}{126}(0+1+32+108+64+5)$$

$$=\frac{210}{126}=\frac{5}{\underline{\underline{3}}}\ (\text{点})$$ ……テ，ト

である。