2012年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅡB〉

第１問

〔１〕

$2\log_a(8-x) > \log_a(x-2)$ ……①

$(a>0,\ a \fallingdotseq 1)$

①において，真数は正であるから，

$8-x>0$ かつ $x-2>0$

すなわち，

$\underline{\underline{2}} < x < \underline{\underline{8}}$ ……③ ……ア，イ

が成り立つ。

ここで，不等式①は，

$\log_a(8-x)^2 > \log_a(x-2)$

と変形できるから，$a<1$ のとき，

$(8-x)^2 < x-2$

すなわち，

$x^2 - \underline{\underline{17}}x + \underline{\underline{66}} \leq 0$ ……② ……ウエ，オカ

(……$\underline{\underline{0}}$) ……キ

となる。

②を解くと，

$(x-6)(x-11)<0$

より，

$6<x<11$ ……④

である。

したがって，真数が正であることと②，すなわち，③，④から，$a<1$ のとき，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は，

$\underline{\underline{6}} < x < \underline{\underline{8}}$ ……ク，ケ

である。

また，$a>1$ のとき，不等式①は，

$(8-x)^2 > x-2$

すなわち，

$(x-6)(x-11)>0$

となるから，これを解くと，

$x<6,\ 11<x$ ……⑤

である。

よって，③，⑤より，$a>1$ のとき，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は，

$\underline{\underline{2}} < x < \underline{\underline{6}}$ ……コ，サ

である。

〔2〕

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のとき,

$\cos 2\beta=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

であり，$0\leqq 2\beta\leqq 2\pi$ であるから,

$2\beta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

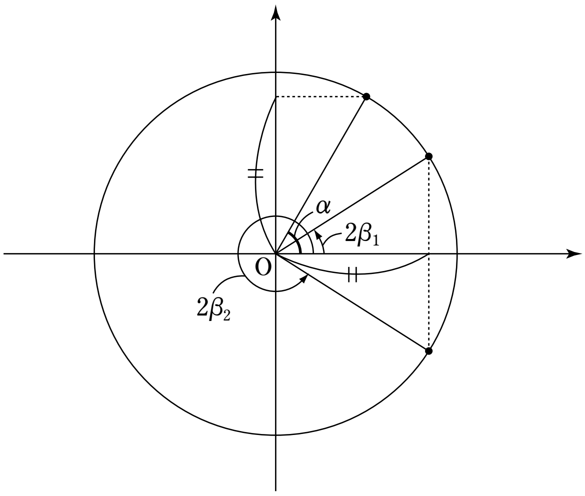
すなわち，β のとり得る値は,

$\dfrac{\pi}{\underline{\underline{6}}}$ と $\dfrac{5}{\underline{\underline{6}}}\pi$ ……シ，ス

である。

ここで, $\sin\alpha=\cos 2\beta$ において, 左辺は単位円周上の角 α に対する点の y 座標を表し, 右辺は単位円周上の角 2β に対する点の x 座標を表している。

よって，単位円周上に，角 α に対する点をとり，その点の y 座標が角 2β に対する点の x 座標と等しくなる場合を考えればよい。



$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のときは，上図より,

$2\beta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

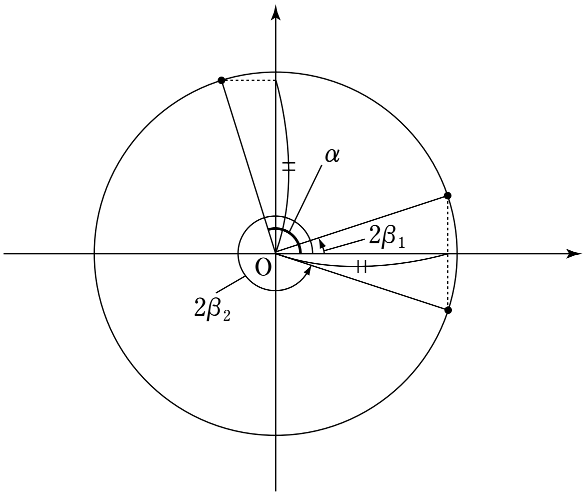
$2\beta_2=2\pi-2\beta_1=2\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{3}{2}\pi+\alpha$

すなわち,

$\beta_1=\dfrac{\pi}{\underline{\underline{4}}}-\dfrac{\alpha}{\underline{\underline{2}}}$ ……① ……セ，ソ

$\beta_2 = \dfrac{3}{\underline{\underline{4}}}\pi + \dfrac{\alpha}{2}$　……②　　……タ

となる。



また，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$ のときは，上図より，

$$2\beta_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$2\beta_2 = 2\pi - 2\beta_1 = 2\pi - \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}\pi - \alpha$$

すなわち，

$\beta_1 = -\dfrac{\pi}{\underline{\underline{4}}} + \dfrac{\alpha}{\underline{\underline{2}}}$　……③　　……チ，ツ

$\beta_2 = \dfrac{5}{\underline{\underline{4}}}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$　……④　　……テ

となる。

ここで，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，①，②より，

$$\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{11}{12}\alpha + \frac{3}{8}\pi$$

であり，

$$\frac{3}{8}\pi \leqq \frac{11}{12}\alpha + \frac{3}{8}\pi < \frac{11}{12}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

であるから，

$\dfrac{3}{8}\pi \leqq \alpha + \dfrac{\beta_1}{2} + \dfrac{\beta_2}{3} < \dfrac{5}{6}\pi$　……⑤

となる。

また，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$ のとき，③，④より，

$$\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \alpha + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= \frac{13}{12}\alpha + \frac{7}{24}\pi$$

であり，

$$\frac{5}{6}\pi = \frac{13}{12}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{7}{24}\pi \leqq \frac{13}{12}\alpha + \frac{7}{24}\pi \leqq \frac{13}{12}\pi + \frac{7}{24}\pi = \frac{11}{8}\pi$$

であるから，

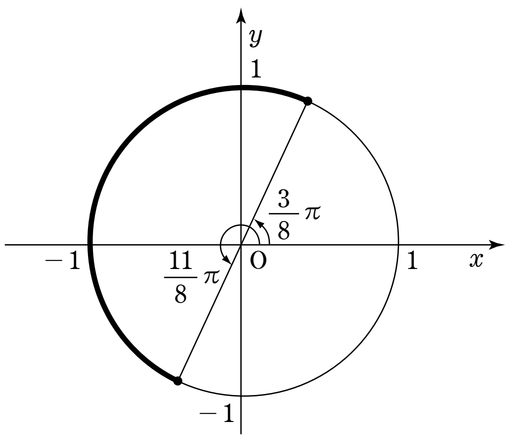
$$\frac{5}{6}\pi \leqq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{11}{8}\pi \quad \cdots\cdots⑥$$

となる。

したがって，⑤，⑥より，$\alpha + \dfrac{\beta_1}{2} + \dfrac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は，

$$\frac{3}{\underline{\underline{8}}}\pi \leqq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{11}{\underline{\underline{8}}}\pi$$ ……ト〜ネ

である。



よって，y が最大となるのは，上図より，

$$\frac{11}{12}\alpha + \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2}$$

すなわち，

$$\alpha = \frac{3}{\underline{\underline{22}}}\pi$$ ……ノ，ハヒ

のときである。

また，このときの y の値は，

$\underset{\sim}{1}$ （……$\underline{\underline{①}}$） ……フ

である。

第２問

（１）

$y=x^3$ より，$y'=3x^2$ であるから，点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における C の接線の方程式は，

$$y-a^3=3a^2(x-a)$$

すなわち，

$$y=3a^2x-2a^3 \quad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots ア，イ，ウ$$

である。

また，$y=x^2+px+q$ より，$y'=2x+p$ であるから，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2+pa+q)$ における D の接線の方程式は，

$$y-(a^2+pa+q)=(2a+p)(x-a)$$

すなわち，

$$y=(2a+p)x-a^2+q \quad \cdots\cdots ④$$

である。

D の P における接線④と，C の P における接線③が一致するとき，

$$\begin{cases} 2a+p=3a^2 \\ -a^2+q=-2a^3 \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} p=3a^2-2a \\ q=-2a^3+a^2 \end{cases} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots エ～ク$$

となる。

（２）

放物線 D が y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ b)$ を通るとき，

$$b=q$$

であるから，①より，

$$b=-2a^3+a^2 \quad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots ケコ，サ$$

が成り立つ。

ここで，$f(x)=-2x^3+x^2$ に対して，

$$f'(x)=-6x^2+2x=-2x(3x-1)$$

となるから，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$$f(0)=0$$

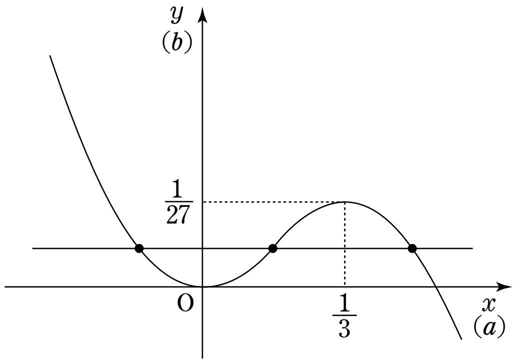
$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-2\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{27}$$

すなわち，関数 $f(x)$ は，

$x=\underline{\underline{0}}$ で極小値 $\underline{\underline{0}}$ をとり，　……シ，ス

$x=\underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$ で極大値 $\underline{\underline{\dfrac{1}{27}}}$ をとる。　……セ～ツ

また，$y=f(x)$ のグラフを描くと，次のようになる。



よって，$0<b<\dfrac{1}{27}$ のとき，②を満たす a の値の個数は $\underline{\underline{3}}$ である。　……テ

（3）

$$y=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$$

であるから，放物線 D の頂点が x 軸上にあるのは，

$$-\frac{p^2}{4}+q=0$$

すなわち，

$$p^2=4q$$

のときである。

よって，このとき，①より，

$$(3a^2-2a)^2=4(-2a^3+a^2)$$

$$9a^4-12a^3+4a^2=-8a^3+4a^2$$

$$a^3(9a-4)=0$$

より，

$$a=\underline{\underline{0}},\ \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$$　……ト，ナ，ニ

である。

ここで，$a=0$ のとき，①より，

$$p=q=0$$

であるから，

$$D_1: y=x^2$$

また，$a=\dfrac{4}{9}$ のとき，$y=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2$ であり，さらに，①より，

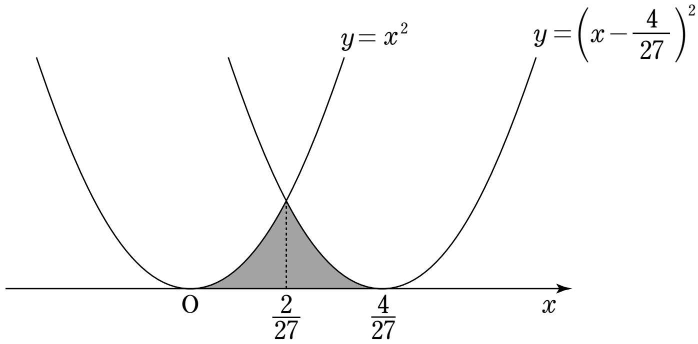
$$p=3\left(\frac{4}{9}\right)^2-2\cdot\frac{4}{9}=-\frac{8}{27}$$

であるから，

$$D_2 : y=\left(x-\frac{4}{27}\right)^2$$

である。

よって，D_2 は D_1 を x 軸方向に $\dfrac{4}{27}$ だけ平行移動したものであり，グラフは次のようになる。



D_1，D_2 と x 軸で囲まれた図形は上の網目部分であるから，求める面積は，

$$\int_0^{\frac{2}{27}} x^2\,dx+\int_{\frac{2}{27}}^{\frac{4}{27}}\left(x-\frac{4}{27}\right)^2 dx$$

$$=2\int_0^{\frac{2}{27}} x^2\,dx \quad \left(x=\frac{2}{27}\text{ に関して対称}\right)$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{2}{27}}$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3^3}\right)^3$$

$$=\frac{2^{\underline{4}}}{3^{\underline{10}}}$$ ……ヌ，ネノ

である。

第3問

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると，

$$a_2 = a_1 + d = -\frac{7}{3}$$

$$a_5 = a_1 + 4d = -\frac{25}{3}$$

であるから，これを解くと，$a_1 = -\frac{1}{3}$，$d = -2$

すなわち，

$a_1 = \frac{-1}{3}$ であり，$\{a_n\}$ の公差は -2　……ア～オ

である。

したがって，

$a_n = -\frac{1}{3} + (n-1)\cdot(-2) = -2n + \frac{5}{3}$　……カキ，ク，ケ

である。

また，S_n は初項 $a_1 = -\frac{1}{3}$，末項 $a_n = -2n + \frac{5}{3}$，項数 n の等差数列の和であるから，

$S_n = \frac{n}{2}\left\{-\frac{1}{3} + \left(-2n + \frac{5}{3}\right)\right\} = -n^2 + \frac{2}{3}n$　……コ，サ，シ

である。

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{4}{3}b_n + S_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots①$$

①において，$n = 1$ のとき，

$$b_1 = \frac{4}{3}b_1 + S_1 = \frac{4}{3}b_1 + a_1 = \frac{4}{3}b_1 - \frac{1}{3}$$

であるから，

$b_1 = 1$　……ス

である。

①より，

$$\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \frac{4}{3}b_{n+1} + S_{n+1} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

であり，$\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}$ であるから，

$$\frac{4}{3}b_{n+1} + S_{n+1} = \left(\frac{4}{3}b_n + S_n\right) + b_{n+1}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 4b_n - 3(S_{n+1} - S_n) \\ &= 4b_n - 3a_{n+1} \end{aligned}$$

$$= 4b_n - 3\left\{-2(n+1) + \frac{5}{3}\right\}$$

すなわち，

$b_{n+1} = \underline{\underline{4}}b_n + \underline{\underline{6}}n + \underline{\underline{1}}$　$(n = 1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$　……③　……セ，ソ，タ

が成り立つ。

ここで，

$b_{n+1} + \{\alpha(n+1) + \beta\} = 4\{b_n + (\alpha n + \beta)\}$

とおくと，

$b_{n+1} = 4b_n + 3\alpha n - \alpha + 3\beta$

であるから，

$$\begin{cases} 3\alpha = 6 \\ -\alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$$

これを解くと，$\alpha = 2$，$\beta = 1$ であるから，③は

$b_{n+1} + \underline{\underline{2}}(n+1) + \underline{\underline{1}} = 4(b_n + 2n + 1)$　……④　……チ，ツ

と変形できる。また，

$c_n = b_n + 2n + 1$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　……②

とおくと，④より，

$c_{n+1} = 4c_n$

であるから，$\{c_n\}$ は

$c_1 = b_1 + 3 = \underline{\underline{4}}$，公比が $\underline{\underline{4}}$ の等比数列　……テ，ト

である。

よって，

$c_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

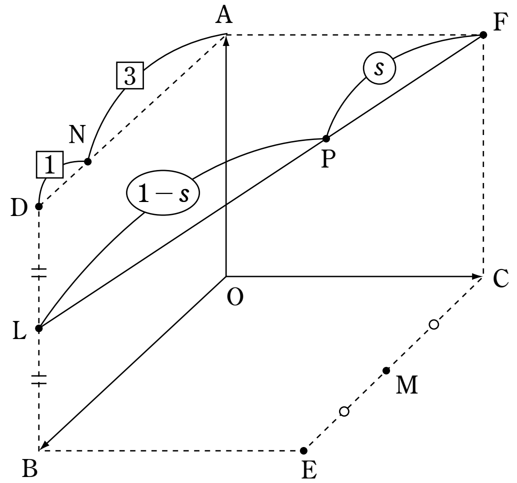
であるから，②により，

$b_n = c_n - 2n - 1 = \underline{\underline{4^n}} - \underline{\underline{2}}n - \underline{\underline{1}}$　……ナ，ヌ，ネ

(……$\underline{\underline{②}}$)　……ニ

である。

第 4 問



（1）

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}}{2}=\frac{\vec{c}+(\vec{b}+\vec{c})}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}\vec{b}+\vec{c}$$ ……ア

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OD}}{4}=\frac{\vec{a}+3(\vec{a}+\vec{b})}{4}=\vec{a}+\underline{\underline{\frac{3}{4}}}\vec{b}$$ ……イ，ウ

と表される。

（2）

点 P は線分 FL を $s:(1-s)$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OL}+(1-s)\overrightarrow{OF}$$

$$=s\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2}+(1-s)\overrightarrow{OF}$$

$$=\frac{s}{2}\left\{\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b})\right\}+(1-s)(\vec{a}+\vec{c})$$

$$=\left(\underline{\underline{1}}-\frac{s}{\underline{\underline{2}}}\right)\vec{a}+s\vec{b}+(\underline{\underline{1}}-s)\vec{c}\quad\cdots\cdots④$$ ……エ，オ，カ

と表される。

ここで，

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{b}-s\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}$$

であり，$\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{MN}$ (k は実数）と表されるとき，

$$\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{b}-s\vec{c}=k\left(\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}\right)$$

となる。

4点O，A，B，Cは同一平面上にないから，

$$\begin{cases} 1-\dfrac{s}{2}=k \\ s-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}k \\ -s=-k \end{cases}$$

これを解くと，

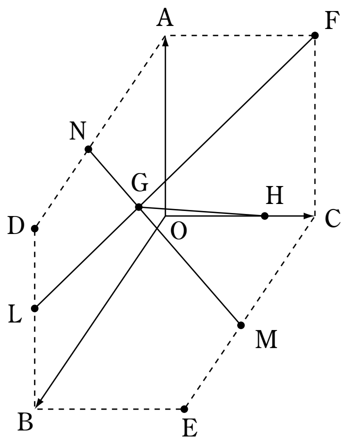
$$s=k=\frac{2}{3}$$

すなわち，

$$s=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}\text{のとき，}\ \overrightarrow{\mathrm{MP}}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}\overrightarrow{\mathrm{MN}}$$ ……キ，ク，ケ，コ

となるので，M，N，Pは一直線上にある。よって2直線FL，MNは交わることがわかる。

（3）



（2）より，$s=\dfrac{2}{3}$のとき，点Pと点Gは一致し，④より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}(\underline{\underline{2}}\vec{a}+\underline{\underline{2}}\vec{b}+\vec{c})$$ ……サ，シ，ス，セ

と表される。

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

$$=(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+\underline{\underline{2}}\vec{c}) \qquad \cdots\cdots ソ$$

と表される。

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから，

$$|\overrightarrow{GF}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{9}\left\{(\sqrt{5})^2+4\cdot4^2+4(\sqrt{3})^2\right\}$$

$$=9$$

よって，

$$|\overrightarrow{GF}|=\underline{\underline{3}} \qquad \cdots\cdots タ$$

となる。

次に，$\overrightarrow{OH}=t\vec{c}$（$t$ は実数）と表したとき，

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}$$

$$=t\vec{c}-\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$$

$$=-\frac{1}{3}\left\{2\vec{a}+2\vec{b}+(1-3t)\vec{c}\right\}$$

であるから，

$$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}=-\frac{1}{9}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})\cdot\left\{2\vec{a}+2\vec{b}+(1-3t)\vec{c}\right\}$$

$$=-\frac{1}{9}\left\{2|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2+2(1-3t)|\vec{c}|^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{9}\left\{2(\sqrt{5})^2-4\cdot4^2+2(1-3t)(\sqrt{3})^2\right\}$$

$$=\underline{\underline{2}}t+\frac{16}{\underline{\underline{3}}} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots チ，ツテ，ト$$

と表される。

また，

$$\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}=2t+\frac{10}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。

さらに，$\angle\mathrm{FGH}=\angle\mathrm{MGH}$ のとき，$\cos\angle\mathrm{FGH}=\cos\angle\mathrm{MGH}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{GF}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|\cos\angle\mathrm{FGH}=3\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|\cos\angle\mathrm{FGH}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{GM}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|\cos\angle\mathrm{MGH}=2\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|\cos\angle\mathrm{FGH}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}\quad\cdots\cdots③$$ ……ナ，ニ

が成り立つ。

①，②，③から，

$$2t+\frac{16}{3}=\frac{3}{2}\left(2t+\frac{10}{3}\right)$$

よって，これを解くと，

$$t=\frac{1}{3}$$ ……ヌ，ネ

である。