

試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

Ⓕ

# 数 学 ②

## 数学Ⅱ

(100 点)  
(60 分)

この問題冊子には、「数学Ⅱ」「数学Ⅱ・数学B」の2科目を掲載しています。  
解答する科目を間違えないよう選択しなさい。

工業数理基礎、簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は、大学入試センター試験の出願時に、それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

### I 注 意 事 項

- 1 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。

#### ① 受験番号欄

受験番号(数字及び英字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

#### ② 氏名欄、試験場コード欄

氏名・フリガナ及び試験場コード(数字)を記入しなさい。

#### ③ 解答科目欄

解答する科目を一つ選び、科目名の下の○にマークしなさい。マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は、0点となります。

- 2 出題科目、ページ及び選択方法は、下表のとおりです。

| 出 題 科 目 | ペ ー ジ | 選 択 方 法                   |
|---------|-------|---------------------------|
| 数 学 Ⅱ   | 4～14  | 左の2科目のうちから1科目を選択し、解答しなさい。 |
| 数学Ⅱ・数学B | 15～33 |                           |

- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 選択問題については、解答する問題を決めたあと、その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし、指定された問題数をこえて解答してはいけません。
- 5 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

### II 解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

## II 解答上の注意

- 1 解答は、解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。
- 2 問題の文中の **ア**，**イウ** などには、特に指示がないかぎり、符号(－)，数字(0～9)，又は文字(a～d)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 **アイウ** に  $-8a$  と答えたいとき

|   |                                  |   |   |   |   |   |   |   |   |                                  |   |                                  |   |   |   |
|---|----------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----------------------------------|---|----------------------------------|---|---|---|
| ア | <input checked="" type="radio"/> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8                                | 9 | a                                | b | c | d |
| イ | <input type="radio"/>            | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | <input checked="" type="radio"/> | 9 | a                                | b | c | d |
| ウ | <input type="radio"/>            | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8                                | 9 | <input checked="" type="radio"/> | b | c | d |

なお、同一の問題文中に **ア**，**イウ** などが2度以上現れる場合、2度目以降は、**ア**，**イウ** のように細字で表記します。

- 3 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$  に  $-\frac{4}{5}$  と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$  として答えなさい。

また、それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば、 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{2a+1}{3}$  と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ ， $\frac{4a+2}{6}$  のように答えてはいけません。

- 4 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $4\sqrt{2}$ ， $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ， $6\sqrt{2a}$  と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ ， $\frac{\sqrt{52}}{4}$ ， $3\sqrt{8a}$  のように答えてはいけません。

# 数 学 II

(全 問 必 答)

## 第 1 問 (配点 30)

[1]  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  として, 不等式

$$2 \log_a(8-x) > \log_a(x-2) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす  $x$  の値の範囲を求めよう。

真数は正であるから,  $\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$  が成り立つ。ただし, 対数  $\log_a b$  に対し,  $a$  を底といい,  $b$  を真数という。

底  $a$  が  $a < 1$  を満たすとき, 不等式  $\textcircled{1}$  は

$$x^2 - \boxed{\text{ウエ}} x + \boxed{\text{オカ}} \boxed{\text{キ}} 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。ただし,  $\boxed{\text{キ}}$  については, 当てはまるものを, 次の  $\textcircled{0} \sim \textcircled{2}$  のうちから一つ選べ。

$\textcircled{0} <$

$\textcircled{1} =$

$\textcircled{2} >$

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

したがって、真数が正であることと②から、 $a < 1$ のとき、不等式①を満たす $x$ のとり得る値の範囲は  $\boxed{\text{ク}} < x < \boxed{\text{ケ}}$  である。

同様にして、 $a > 1$ のときには、不等式①を満たす $x$ のとり得る値の範囲は  $\boxed{\text{コ}} < x < \boxed{\text{サ}}$  であることがわかる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

〔2〕  $0 \leq \alpha \leq \pi$  として

$$\sin \alpha = \cos 2\beta$$

を満たす  $\beta$  について考えよう。ただし、 $0 \leq \beta \leq \pi$  とする。

たとえば、 $\alpha = \frac{\pi}{6}$  のとき、 $\beta$  のとり得る値は  $\frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}$  と  $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$  の

二つである。

このように、 $\alpha$  の各値に対して、 $\beta$  のとり得る値は二つある。そのうちの小さい方を  $\beta_1$ 、大きい方を  $\beta_2$  とし

$$y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$$

が最大となる  $\alpha$  の値とそのときの  $y$  の値を求めよう。

$\beta_1, \beta_2$  を  $\alpha$  を用いて表すと、 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  のときは

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}}, \quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{セ}}} \pi + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となり、 $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$  のときは

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{\boxed{\text{チ}}} + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}}, \quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{チ}}} \pi - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

したがって、 $\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}$  のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{\boxed{\text{ニ又}}}{\boxed{\text{ネ}}} \pi$$

である。よって、 $y$  が最大となる  $\alpha$  の値は  $\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}} \pi$  であり、そのときの

$y$  の値は  $\boxed{\text{フ}}$  であることがわかる。 $\boxed{\text{フ}}$  に当てはまるものを、次の  
①～③のうちから一つ選べ。

①  $\frac{1}{2}$

② 1

③  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 数学Ⅱ

### 第2問 (配点 30)

座標平面上で曲線  $y = x^3$  を  $C$  とし、放物線  $y = x^2 + px + q$  を  $D$  とする。

- (1) 曲線  $C$  上の点  $P(a, a^3)$  における  $C$  の接線の方程式は

$$y = 3a \boxed{\text{ア}} x - \boxed{\text{イ}} a \boxed{\text{ウ}}$$

である。放物線  $D$  は点  $P$  を通り、 $D$  の  $P$  における接線と、 $C$  の  $P$  における接線が一致するとする。このとき、 $p$  と  $q$  を  $a$  を用いて表すと

$$\begin{cases} p = 3a \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} a \\ q = \boxed{\text{カキ}} a^3 + a \boxed{\text{ク}} \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

以下、 $p$ 、 $q$  は  $\textcircled{1}$  を満たすとする。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) 放物線  $D$  が  $y$  軸上の与えられた点  $Q(0, b)$  を通るとき

$$b = \boxed{\text{ケコ}} a^3 + a^{\boxed{\text{サ}}} \dots\dots\dots ②$$

が成り立つ。与えられた  $b$  に対して、② を満たす  $a$  の値の個数を調べよう。

そのために、関数

$$f(x) = \boxed{\text{ケコ}} x^3 + x^{\boxed{\text{サ}}}$$

の増減を調べる。関数  $f(x)$  は、 $x = \boxed{\text{シ}}$  で極小値  $\boxed{\text{ス}}$  をとり、

$$x = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \text{ で極大値 } \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}} \text{ をとる。}$$

関数  $y = f(x)$  のグラフをかくことにより、 $\boxed{\text{ス}} < b < \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$  のと

き、② を満たす  $a$  の値の個数は  $\boxed{\text{テ}}$  であることがわかる。

(3) 放物線  $D$  の頂点が  $x$  軸上にあるのは、 $a = \boxed{\text{ト}}$  ,  $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$  の二つの場

合である。 $a = \boxed{\text{ト}}$  のときの放物線を  $D_1$  ,  $a = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$  のときの放物線

を  $D_2$  とする。 $D_1$  ,  $D_2$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積は  $\frac{2\boxed{\text{ヌ}}}{3\boxed{\text{ネノ}}}$  である。



## 数学Ⅱ

### 第3問 (配点 20)

O を原点とする座標平面上に2点  $A(1, a)$ ,  $B(0, 2)$  をとる。三角形 OAB の重心を G, 直線 AG と辺 OB との交点を L とおく。L の座標は  $(0, \boxed{\text{ア}})$  である。線分 OL 上に点  $P(0, t)$  をとり, 直線 PG と直線 AB との交点を Q とする。P が線分 OL 上を動くとき, 三角形 BPQ の面積  $S$  の最小値を求めよう。

G の座標は  $\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \frac{\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$  であるから, PG の方程式は

$$y = \left(\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ウ}}} - \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ウ}}}t\right)x + t$$

となる。ただし,  $\boxed{\text{エ}}$  と  $\boxed{\text{オ}}$  の解答の順序, および  $\boxed{\text{カ}}$  と  $\boxed{\text{キ}}$  の解答の順序は問わない。

また, AB の方程式は

$$y = \left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ウ}}} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)x + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であるから, Q の  $x$  座標は

$$\frac{\boxed{\text{シ}} - t}{\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}}t}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

したがって、三角形 BPQ の面積  $S$  を  $t$  を用いて表すと

$$S = \frac{(\boxed{\text{ソ}} - t)^2}{\boxed{\text{タ}} (\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}} t)}$$

となる。ここで、式を簡単にするために、 $u = \boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}} t$  とおくと

$$S = \frac{1}{\boxed{\text{チツ}}} \left( u + \frac{\boxed{\text{テ}}}{u} + \boxed{\text{ト}} \right)$$

となる。

P が線分 OL 上を動くとき、 $u$  のとり得る値の範囲は  $\boxed{\text{ナ}} \leq u \leq \boxed{\text{ニ}}$

である。相加平均と相乗平均の関係により

$$u + \frac{\boxed{\text{テ}}}{u} \geq \boxed{\text{ヌ}}$$

となり、等号は  $u = \boxed{\text{ネ}}$  のときに成り立つ。したがって、 $u = \boxed{\text{ネ}}$  のと

き、 $S$  は最小値  $\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$  をとる。また、このときの PG の傾きは  $\boxed{\text{ヒ}}$  であ

る。

## 数学Ⅱ

### 第4問 (配点 20)

$a$  を実数とし、次数が3以下の整式  $P(x)$  は

$$P(1)=0, \quad P(2)=a, \quad P(3)=2, \quad P(4)=6$$

を満たすとする。 $P(1)=0$  であるので、因数定理から、 $P(x)$  は  $x - \boxed{\text{ア}}$  で割り切れ、次数が2以下の整式  $Q(x)$  で

$$P(x) = (x - \boxed{\text{ア}}) Q(x)$$

を満たすものがある。 $Q(x)$  を求めるために

$$Q(x) = r(x-2)(x-3) + s(x-2) + t$$

において、定数  $r, s, t$  を  $a$  を用いて表してみよう。 $P(2)=a$  から  $t = \boxed{\text{イ}}$

となり、次に、 $P(3)=2$  から  $s = \boxed{\text{ウエ}} + \boxed{\text{オ}}$  となる。さらに、 $P(4)=6$

から  $r = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$  となる。したがって、 $Q(x)$  は

$$\frac{1}{\boxed{\text{キ}}} \left\{ \boxed{\text{カ}} x^2 + \left( \boxed{\text{クケ}} a + \boxed{\text{コ}} \right) x + \boxed{\text{サシ}} a - \boxed{\text{ス}} \right\}$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

方程式  $P(x) = 0$  が虚数解をもつような  $a$  の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}} < a < \boxed{\text{セ}} + \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である。この範囲にある最小の整数は  $\boxed{\text{チ}}$  である。 $a = \boxed{\text{チ}}$  のとき、

方程式  $P(x) = 0$  の虚数解は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{テ}}} i}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

## 数学Ⅱ

(下書き用紙)