2013 年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅠA〉

第 1 問

〔1〕

$$
\begin{aligned}
AB &= \frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}} \\
&= \frac{1}{(1+\sqrt{6})+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{6})-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-\underline{\underline{3}}} && \cdots\cdots ア \\
&= \frac{1}{(1+2\sqrt{6}+6)-3} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}+4} \\
&= \frac{1\cdot(\sqrt{6}-2)}{2(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)} \\
&= \frac{\sqrt{6}-2}{2(6-4)} \\
&= \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}-2}{4}}} && \cdots\cdots イ，ウ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{A}+\frac{1}{B} &= (1+\sqrt{3}+\sqrt{6})+(1-\sqrt{3}+\sqrt{6}) \\
&= \underline{\underline{2}}+\underline{\underline{2}}\sqrt{6} && \cdots\cdots エ，オ
\end{aligned}
$$

以上により，

$$
\begin{aligned}
A+B &= AB\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right) \\
&= \frac{\sqrt{6}-2}{4}\cdot(2+2\sqrt{6}) \\
&= \frac{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+1)}{2} \\
&= \frac{6-\sqrt{6}-2}{2} \\
&= \underline{\underline{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}} && \cdots\cdots カ，キ
\end{aligned}
$$

〔2〕

(1)「$r \Rightarrow (p$ または $q)$」の対偶は,

「$\overline{(p \text{ または } q)} \Rightarrow \overline{r}$」……①

ここで，ド・モルガンの法則より,

$\overline{(p \text{ または } q)} \Longleftrightarrow (\,\overline{p}$ かつ $\overline{q}\,)$

であるから，①は,

「$(\,\overline{p}$ かつ $\overline{q}\,) \Rightarrow \overline{r}$」

よって答えは，① ……ク

(2) $(p$ または $q)$ を満たす選択肢は,

① 内角が 30°，45°，105°の三角形
② 正三角形
③ 三辺の長さが 3，4，5 の三角形
④ 頂角が 45°の二等辺三角形

の 4 つである。

このうち，r を満たさないものは，①と④であるから，答えは①，④ ……ケ，コ

(3) $\overline{p}$：二等辺三角形である

$\overline{q}$：直角三角形である

であるから，(2) の選択肢のうち，$(\,\overline{p}$ かつ $\overline{q}\,)$ を満たすものは,

⓪ 直角二等辺三角形

のみであり，これは

$\overline{r}$：45°の内角を少なくとも 1 つもつ

をも満たす。

よって，「$(\,\overline{p}$ かつ $\overline{q}\,) \Rightarrow \overline{r}$」は真である。

これと (1)，(2) より,

「$r \Rightarrow (p$ または $q)$」は真,

「$(p$ または $q) \Rightarrow r$」は偽

であるから，r は $(p$ または $q)$ であるための，十分条件であるが，必要条件ではない。

よって，答えは，② ……サ

第2問

直線 $y=-x$……①　の傾きは -1 であるから, ①上を動く点Pの x 座標が2増加すると, y 座標は2減少する。

直線 $y=10x$……②　の傾きは10であるから, ②上を動く点Qの x 座標が1増加すると, y 座標は10増加する。

よって，2点P，Qが出発して t 秒後の座標は，それぞれ,

$$P(-8+2t,\ 8-2t),\ Q(t,\ 10t)$$

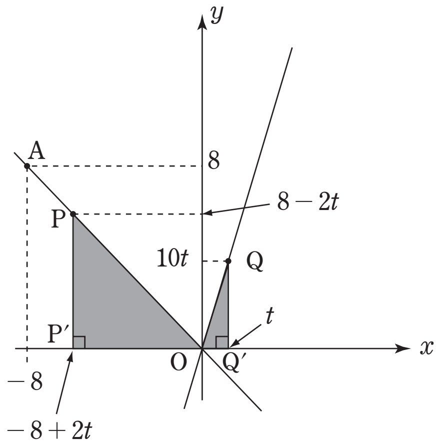
である。

点Pが原点Oに到達するのは,

$-8+2t=0$ より，$t=\underline{\underline{4}}$　……ア

のときである。

(1)　$0<t<4$ のときの図は，右のようになる。



このとき, △OPP′ と △OQQ′ の面積の和 S は,

$$S=\frac{1}{2}\{-(-8+2t)\}(8-2t)+\frac{1}{2}t\cdot 10t$$
$$=2(4-t)^2+5t^2$$
$$=2(16-8t+t^2)+5t^2$$
$$=\underline{\underline{7}}t^2-\underline{\underline{16}}t+\underline{\underline{32}}$$
……イ～カ

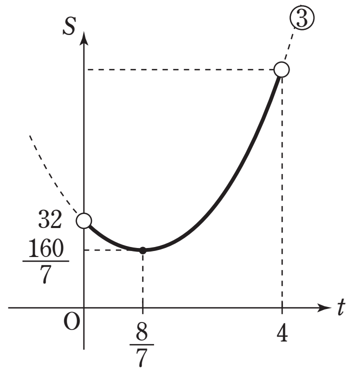
さらに,

$$S=7\left(t^2-\frac{16}{7}t\right)+32$$
$$=7\left\{\left(t-\frac{8}{7}\right)^2-\frac{64}{49}\right\}+32$$
$$=7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{160}{7}\ \cdots\cdots③$$

であるから，$0<t<4$ においては，$t=\underline{\underline{\dfrac{8}{7}}}$　……キ，ク

で S は最小値 $\underline{\underline{\dfrac{160}{7}}}$ をとる。　……ケコサ，シ

$0<t<4$ における③のグラフは，右のようになる。



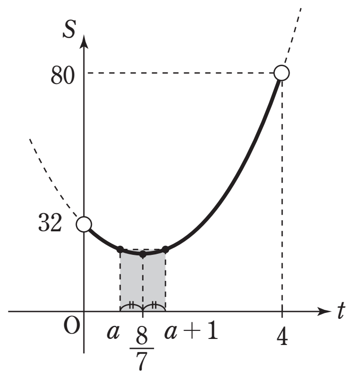
$a\leqq t\leqq a+1\ (0<a<3)$……④

において,

(ｉ)　S が $t=\dfrac{8}{7}$ で最小となるのは，$\dfrac{8}{7}$ が④の範囲に含まれるときである。

よって，$a\leqq\dfrac{8}{7}\leqq a+1$ より，答えは,

$$\underline{\underline{\frac{1}{7}}}\leqq a\leqq\underline{\underline{\frac{8}{7}}}$$
……ス，セ，ソ，タ



（ⅱ） S が $t=a$ で最大となるのは，④の範囲が右のグラフに示す場合か, これよりも左にあるときである。

右のグラフのようになるのは,

$$\frac{a+(a+1)}{2}=\frac{8}{7}$$

より，$a=\dfrac{9}{14}$ であるから，答えは,

$0<a\leqq\underline{\underline{\dfrac{9}{14}}}$ ……チ，ツテ

(2) 原点 O を通り，放物線 $y=2x^2$ を平行移動したグラフの式は,

$y=2x^2+bx$……⑥

と表すことができる。

⑥が P，Q を通ることから,

$8-2t=2(-8+2t)^2+b(-8+2t)$……⑦

$10t=2t^2+bt$……⑧

$t\neq 4$ より，⑦の両辺を $-8+2t$ で割ると,

$-1=2(-8+2t)+b$……⑨

$t\neq 0$ より，⑧の両辺を t で割ると,

$10=2t+b$……⑩

ここで，⑨－⑩をつくると,

$-11=-16+2t$　　これより，$t=\underline{\underline{\dfrac{5}{2}}}$ ……ト，ナ

このとき，⑩より，$b=5$ となるから，⑥は,

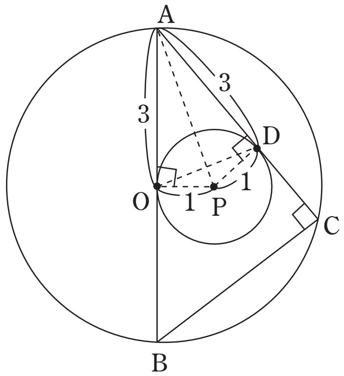
$$\begin{aligned} y &= 2x^2+5x \\ &= 2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right) \\ &= 2\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right\} \\ &= 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8} \end{aligned}$$

よって,

x 軸方向に $\underline{\underline{\dfrac{-5}{4}}}$，$y$ 軸方向に $\underline{\underline{\dfrac{-25}{8}}}$ だけ ……ニ～フ

平行移動すればよい。

第３問



題意を図示すると右のようになる。

$AD = AO = 3$,

$PD = PO = 1$ である。

$\triangle AOP$ において三平方の定理を用いると,

$$AP = \sqrt{3^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{10}} \qquad \cdots\cdots \text{アイ}$$

ここで，四角形 AOPD の面積は，$2\triangle AOP = 3 \cdot 1 = 3$ であるが，$AP \perp OD$ であるから,

$$\frac{1}{2} AP \cdot OD = 3$$

これより，$OD = \dfrac{6}{AP} = \dfrac{6}{\sqrt{10}} = \underline{\underline{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}}$　……ウ，エオ，カ

さらに, $\triangle AOD$ において余弦定理を用いると,

$$\cos\angle OAD = \frac{AO^2 + AD^2 - OD^2}{2 \cdot AO \cdot AD} = \frac{3^2 + 3^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1 + 1 - \dfrac{2}{5}}{2} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}} \qquad \cdots\cdots \text{キ，ク}$$

ここで，AB は円 O の直径であるから，$\angle ACB = 90°$

よって，$AC = AB \cos\angle OAD = 6 \cdot \dfrac{4}{5} = \underline{\underline{\dfrac{24}{5}}}$　……ケコ，サ

このとき,

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\angle OAD \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC\sqrt{1 - \cos^2\angle OAD} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{24}{5}\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{3}{5} = \underline{\underline{\frac{216}{25}}} \qquad \cdots\cdots \text{シ〜タ}\end{aligned}$$

さらに,

$$BC = AB \sin\angle OAD = 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$

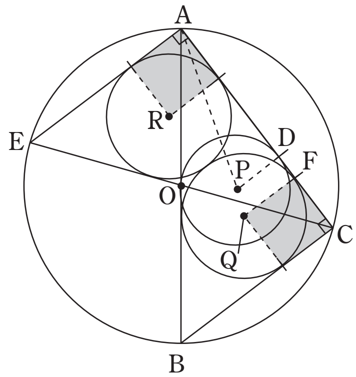
ここに, $\triangle ABC$ の内接円の中心を Q，半径を q とすると,

$$\triangle ABC = \triangle QAB + \triangle QBC + \triangle QCA$$

より,

$$\frac{216}{25} = \frac{1}{2} \cdot 6q + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{5} q + \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} q = \frac{36}{5} q$$

よって，$q=\underline{\underline{\dfrac{6}{5}}}$　……チ，ツ



(1)　題意を図示すると右のようになる。

$AB=CE\ (=6)$

$AC=CA$（共通）

$\angle ACB=\angle CAE\ (=90^\circ)$

より，$\triangle ABC\equiv\triangle CEA$ であるから，それぞれの内接円の半径も等しい。よって，$QR/\!/AC$ である。

これと，図に網目をつけた四角形が合同な正方形であることから，

$QR=AC-2q$

$=\dfrac{24}{5}-2\cdot\dfrac{6}{5}=\underline{\underline{\dfrac{12}{5}}}$　……テト，ナ

ここに，$\dfrac{12}{5}=2\cdot\dfrac{6}{5}=2q$ であるから，2円Q，Rは外接する（$\underline{\underline{②}}$）。　……ニ

(2)　上図で $\triangle AQF\backsim\triangle APD$ であり，相似比は $QF:PD=\dfrac{6}{5}:1=6:5$ であることから，$AQ=\dfrac{6}{5}AP=\dfrac{6}{5}\cdot\sqrt{10}=\underline{\underline{\dfrac{6\sqrt{10}}{5}}}$　……ヌ，ネノ，ハ

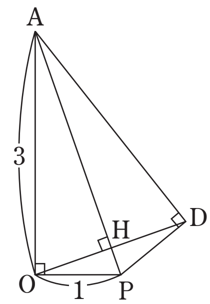
$PQ=\dfrac{6-5}{5}AP=\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt{10}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}}$　……ヒフ，ヘ

ここに，$PQ=\dfrac{\sqrt{10}}{5}<\dfrac{\sqrt{36}}{5}=\dfrac{6}{5}=q$

$PQ=\dfrac{\sqrt{10}}{5}<\dfrac{\sqrt{25}}{5}=\dfrac{5}{5}=1$

より，点Pは円Qの内部に，点Qは円Pの内部にあることがわかる（$\underline{\underline{②}}$）。　……ホ

〈ウ～カの別解〉



APとODの交点をHとする。

$AP\perp OD$ より

$\triangle OHP\backsim\triangle AHO\backsim\triangle AOP$

であるから，

$HP:HO=HO:HA=OP:OA=1:3$

よって，$HP:HO:HA=1:3:9$

ここに，$AP=\sqrt{10}$ より，

$HO=\dfrac{3}{1+9}AP=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

よって，$OD=2HO=\underline{\underline{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}}$　……ウ，エオ，カ

第４問

(1)　各桁に 1，2，3，4 の 4 通りの数の決め方があるから，

$4^4=\underline{\underline{256}}$ (個)　……アイウ

(2)　各桁が異なる数であることから，1，2，3，4 の 4 数の順列を求めると，

$4\,!=4\cdot3\cdot2\cdot1=\underline{\underline{24}}$ (個)　……エオ

(3)(ｉ)　4 つから 2 つを選ぶ組合せを求めると，

$${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=\underline{\underline{6}}\text{ (通り)}$$　……カ

(ⅱ)　4 つから 2 つを選ぶ組合せを求めると，

${}_4\mathrm{C}_2=\underline{\underline{6}}$ (通り)　……キ

(ⅲ)　(ｉ) と (ⅱ) より，$6\cdot6=\underline{\underline{36}}$ (個)　……クケ

(4)(ｉ)　四つとも同じ数字である場合は 4 通りであるから，得点が 9 点である確率は，

$$\frac{4}{256}=\frac{1}{\underline{\underline{64}}}$$　……コ，サシ

得点が 3 点である確率は，(3)(ⅲ) より，

$$\frac{36}{256}=\frac{9}{\underline{\underline{64}}}$$　……ス，セソ

(ⅱ)　3 回現れる数字が一つと，1 回だけ現れる数字が一つあるとき，それぞれの数字の決め方が，${}_4\mathrm{P}_2=4\cdot3=12$ (通り)

その各々に対して，1 回だけ現れる数字の位置の決め方が 4 通りあるから，得点が 2 点となる確率は，

$$\frac{12\cdot4}{256}=\frac{3}{\underline{\underline{16}}}$$　……タ，チツ

さらに，数字の重複がない確率は，(2) より，$\dfrac{24}{256}$ であるから，(以上の余事象である) 得点が 1 点となる確率は，

$$1-\frac{4+36+48+24}{256}=\frac{144}{256}=\frac{9}{\underline{\underline{16}}}$$　……テ，トナ

(ⅲ)　以上により，得点の期待値は，

$$9\cdot\frac{4}{256}+3\cdot\frac{36}{256}+2\cdot\frac{48}{256}+1\cdot\frac{144}{256}+0\cdot\frac{24}{256}$$

$$=\frac{36+108+96+144+0}{256}=\frac{384}{256}=\frac{3}{\underline{\underline{2}}}\text{ (点)}$$　……ニ，ヌ

である。