2013 年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅡB〉

第 1 問

〔1〕(1)　P は AB を 2 : 1 に内分する点なので,

$$\left(\frac{6\cdot1+3\cdot2}{2+1},\ \frac{0\cdot1+3\cdot2}{2+1}\right)=(\underline{\underline{4}},\ \underline{\underline{2}})\qquad \cdots\cdots ア,\ イ$$

また, Q は AB を 1 : 2 に外分する点なので, A は線分 BQ の中点である。

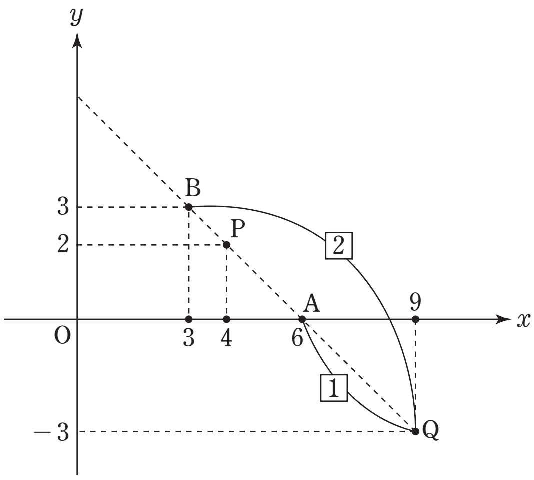
よって, Q $(x,\ y)$ とおくと,

$$\frac{3+x}{2}=6,\quad \frac{3+y}{2}=0 \quad より,\quad x=9,\ y=-3$$

よって, Q $(\underline{\underline{9}},\ \underline{\underline{-3}})$　……ウ, エオ

［外分点の公式を使うと, 次のようになる。

$$\left(\frac{6\cdot2+3\cdot(-1)}{-1+2},\ \frac{0\cdot2+3\cdot(-1)}{-1+2}\right)=(\underline{\underline{9}},\ \underline{\underline{-3}})\qquad \cdots\cdots ウ,\ エオ$$
］



(2)　直線 OP の傾きは $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ で, 線分 OP の中点は $(2,\ 1)$ であるから, OP に垂直で $(2,\ 1)$ を通る直線 (これを l_1 とする) の方程式は,

$$y=-2(x-2)+1 \quad より,\quad l_1 : y=\underline{\underline{-2}}x+\underline{\underline{5}}\qquad \cdots\cdots カキ,\ ク$$

また, 直線 PQ の傾きは -1 で, 線分 PQ の中点が

$$\left(\frac{4+9}{2},\ \frac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{13}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

より, PQ に垂直で $\left(\frac{13}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ を通る直線 (これを l_2 とする) は,

$$y=\left(x-\frac{13}{2}\right)-\frac{1}{2} \quad より,\quad l_2 : y=x-\underline{\underline{7}}\qquad \cdots\cdots ケ$$

円 C の中心は，l_1，l_2 の交点だから，

$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=x-7 \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$$

よって，C の中心が $(4,\ -3)$ であり，

$$\mathrm{OC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

より，円 C の半径は 5 なので，C の方程式は，

$$(x-4)^2+(y+3)^2=5^2$$

よって，$C:(x-\underline{\underline{4}})^2+(y+\underline{\underline{3}})^2=\underline{\underline{25}}$　　……コ～ス

（３）　R は x 軸上の点なので，$\mathrm{R}(a,\ 0)\ (a\neq 0)$ とおくと，

$$(a-4)^2+(0+3)^2=25 \quad より，(a-4)^2=16$$

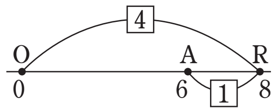
よって，

$$a-4=\pm 4 \quad より，a=0,\ 8$$

$a\neq 0$　より，R の x 座標は 8 であり，$\mathrm{OA}=6$，$\mathrm{AR}=8-6=2$　だから，

$$\mathrm{OR}:\mathrm{AR}=8:2=4:1$$

これより，R は線分 OA を $\underline{\underline{4}}:1$ に外分する。　　……セ



〔２〕　連立方程式（＊）で，

$X=2^x$，$Y=2^y$，$Z=2^z$ とおくと，

$$XYZ=2^x2^y2^z=2^{x+y+z}$$

（＊）の第１式より，

$$XYZ=2^3=\underline{\underline{8}} \quad ……①$$

……ソ

（＊）の第２式より，

$$X+Y+Z=2^x+2^y+2^z=\frac{35}{2} \quad ……②$$

また，（＊）の第３式より，

$$\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}=\frac{49}{16} \quad つまり，\quad \frac{XY+YZ+ZX}{XYZ}=\frac{49}{16}$$

①を用いて，

$$\frac{XY+YZ+ZX}{8}=\frac{49}{16} \quad より，\quad XY+YZ+ZX=\frac{49}{\underline{\underline{2}}} \quad ……③$$

……タチ，ツ

ここで，

$$(t-X)(t-Y)(t-Z)=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ$$

に①，②，③を用いると，

$$(t-X)(t-Y)(t-Z)=t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{49}{2}t-8$$

この右辺を $t-\dfrac{1}{2}$ で割ると，

　商は　$t^2-17t+16=(t-1)(t-16)$

計算は筆算なら左下，組立除法なら右下。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 1 & -17 & 16 \\
\hline
1\ \ -\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{35}{2} & \dfrac{49}{2} & -8 \\
 & 1 & -\dfrac{1}{2} & & \\
\hline
 & & -17 & \dfrac{49}{2} & \\
 & & -17 & \dfrac{17}{2} & \\
\hline
 & & & 16 & -8 \\
 & & & 16 & -8 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cccc}
\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{35}{2} & \dfrac{49}{2} & -8 \\
 & & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{17}{2} & 8 \\
\hline
 & 1 & -17 & 16 & \boxed{0}
\end{array}
$$

↗で「$\times\dfrac{1}{2}$」をする

よって，

$$(t-X)(t-Y)(t-Z)=\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-\underline{\underline{1}})(t-\underline{\underline{16}})$$ ……テ，トナ

これより，$(t-X)(t-Y)(t-Z)=0$ の 3 解 X，Y，Z は

$\left(t-\dfrac{1}{2}\right)(t-1)(t-16)=0$ の 3 解 $\dfrac{1}{2}$，1，16 であり，$X \leqq Y \leqq Z$ により，

$$X=\frac{1}{2},\ Y=1,\ Z=16=2^4 \quad \cdots\cdots④$$

ところで，$X=2^x$ で，両辺の 2 を底とする対数をとると，

　$\log_2 X=x$　より，　$x=\log_{\underline{\underline{2}}} X$ ……ニ

同様にして，$y=\log_2 Y$，$z=\log_2 Z$ となり，④を用いると，

$$x=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=\underline{\underline{-1}}$$ ……ヌネ

　$y=\log_2 1=\underline{\underline{0}}$ ……ノ

　$z=\log_2 2^4=4\log_2 2=4\cdot 1=\underline{\underline{4}}$ ……ハ

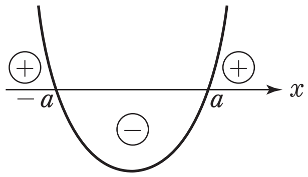
であることがわかる。

第 2 問

$f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3$　より，

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$

$= 3(x-a)(x+a)$



$a > 0$ より，$f(x)$ の増減表は右表のようになる。

x		$-a$		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，

$x = -a$ で極大値 ……アイ

$f(-a) = (-a)^3 - 3a^2 \cdot (-a) + a^3 = 3a^3$ ……ウ，エ

をとり，

$x = a$ で極小値 ……オ

$f(a) = a^3 - 3a^2 \cdot a + a^3 = -a^3$ ……カ，キ

をとる。

このとき，2 点 $(-a,\ 3a^3)$，$(a,\ -a^3)$ と原点を通る放物線 C の方程式は，C が原点を通ることから

$y = px^2 + qx$ ……①

とおける。

①に $(-a,\ 3a^3)$ を代入して，

$3a^3 = a^2p - aq$ ……②

①に $(a,\ -a^3)$ を代入して，

$-a^3 = a^2p + aq$ ……③

②＋③より，$a^2p = a^3$，　$a > 0$ より，　$p = a$

②－③より，$-2aq = 4a^3$，$a > 0$ より，　$q = -2a^2$

したがって，①より C の方程式は

$y = ax^2 - 2a^2x$ ……④ ……ク，ケ，コ

となる。

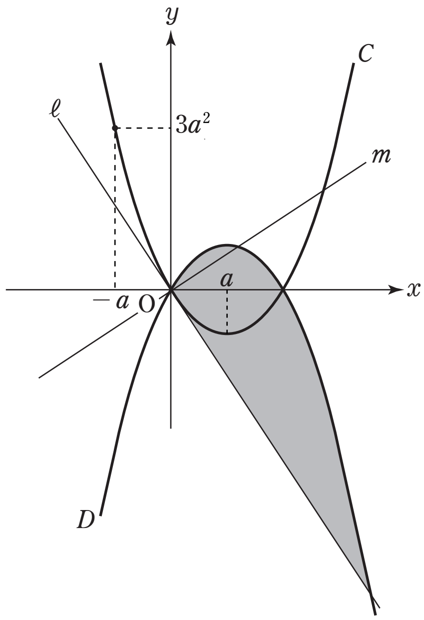
④より，$y' = 2ax - 2a^2$ なので，原点における C の接線 ℓ の傾きは

$2a \cdot 0 - 2a^2 = -2a^2$

よって，$\ell : y = -2a^2x$ ……⑤ ……サシ，ス

これより，原点を通り ℓ と垂直な直線 m の方程式は

$m : y = \dfrac{1}{2a^2}x$ ……⑥ ……セ，ソ



次に，D と C は x 軸に関して対称なので，D の方程式は，④で y を $-y$ として，

$$-y = ax^2 - 2a^2x$$

つまり，

$$y = -ax^2 + 2a^2x$$

となる。

D と ℓ の交点の x 座標は，

$$-ax^2 + 2a^2x = -2a^2x$$

より，

$$ax^2 - 4a^2x = 0$$

$$ax(x-4a) = 0$$

$$x = 0,\ 4a$$

であるから，ℓ と D が囲む図形（上図の網目部）の面積 S は

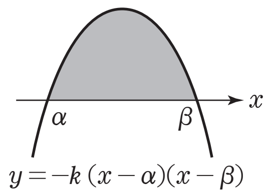
$$S = \int_0^{4a} \left\{(-ax^2 + 2a^2x) - (-2a^2x)\right\} dx$$

$$= \int_0^{4a} \left\{-ax(x-4a)\right\} dx$$

（一般に右図の網目部の面積は

$$-\int_\alpha^\beta k(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots\cdots(☆)$$

である。）



$$= \frac{a}{6}(4a-0)^3 = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}a^4 \quad \cdots\cdots ⑦ \qquad \cdots\cdots タチ，ツ，テ$$

（$\int$ の中の2次の係数が $-a$ であることに注意）

一方，C と m の交点の x 座標は

$$ax^2-2a^2x=\frac{1}{2a^2}x$$

$a>0$ より，

$$x^2-\left(2a+\frac{1}{2a^3}\right)x=0$$

$$x\left(x-\frac{4a^4+1}{2a^3}\right)=0$$

より，0 と $\dfrac{4a^{\underline{\underline{4}}}+1}{2a^{\underline{\underline{3}}}}$ である。　……ト，ナ

$\alpha=\dfrac{4a^4+1}{2a^3}$ とおくと，(☆)から

$$T=\int_0^{\alpha}\left\{-ax(x-\alpha)\right\}dx=\frac{a}{6}\alpha^3 \quad ……⑧$$

となる。

$S=T$ のとき，⑦，⑧より，

$$\frac{32}{3}a^4=\frac{a}{6}\alpha^3 \quad より，\alpha^3=64a^3=(4a)^3$$

よって，$\alpha=4a$ であるから，

$$\frac{4a^4+1}{2a^3}=4a，つまり \quad 4a^4+1=8a^4$$

これより，$S=T$ となるのは，$a^4=\dfrac{1}{\underline{\underline{4}}}$ のとき，　……ニ，ヌ

であり，このときの S の値は，⑦より，

$$S=\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{\underline{\underline{3}}}$$　……ネ，ノ

第3問

（1）　$\alpha=\dfrac{1}{3}\alpha+1$ を解くと，$\alpha=\dfrac{3}{2}$

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+1 & \cdots\cdots Ⓐ \\ \dfrac{3}{2}\ \ =\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}+1 & \cdots\cdots Ⓑ \end{cases}$$

で，Ⓐ－Ⓑより，

$$p_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{3}{2}\right)$$ ……ア，イ

となるので，数列 $\left\{p_n-\dfrac{3}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であり，

$$p_n-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}$$

これより，数列 $\{p_n\}$ の一般項

$$p_n=\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}+\frac{3}{2}\ \left(=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}\right)$$ ……ウ～カ

を得る。

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\frac{3}{2}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}n$$

$$=\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{3n}{2}$$ …………キ～サ

（2）　$a_1=a_2=a_3=3$ と②より，

$$a_4=\frac{a_1+a_2}{a_3}=\frac{3+3}{3}=2$$ …………シ

$$a_5=\frac{a_2+a_3}{a_4}=\frac{3+3}{2}=3$$

$$a_6=\frac{a_3+a_4}{a_5}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$$ …………ス，セ

$$a_7=\frac{a_4+a_5}{a_6}=\frac{2+3}{\frac{5}{3}}=3$$

であるから，

$b_1=a_1=3$，$b_2=a_{2\cdot 2-1}=a_3=3$，$b_3=a_{2\cdot 3-1}=a_5=3$

$$b_4 = a_{2\cdot 4-1} = a_7 = 3$$

より，$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 3$ となるので，

$$b_n = 3 \quad (1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots③$$

と推定できる。

そこで，すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1} = b_n \qquad \cdots\cdots④$$

であることを，数学的帰納法により証明する。

(……②)　………ソ

［Ⅰ］ $n=1$ のとき，$b_1 = 3$，$b_2 = 3$ であることから④は成り立つ。

［Ⅱ］ $n=k$ のとき，④が成り立つ，すなわち，

$$b_{k+1} = b_k \quad \cdots\cdots⑤$$

と仮定する。②で n に $2k$ と $2k-1$ を代入した式から，

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{a_{2k+2}},\quad a_{2k+2} = \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{a_{2k+1}}$$

を得るので，

$$a_{2k-1} = b_k,\quad a_{2k} = c_k,\quad a_{2k+1} = a_{2(k+1)-1} = b_{k+1},$$

$$a_{2k+2} = a_{2(k+1)} = c_{k+1},\quad a_{2k+3} = a_{2(k+2)-1} = b_{k+2}$$

から，

$$b_{k+2} = \frac{c_k + b_{k+1}}{c_{k+1}},\quad c_{k+1} = \frac{b_k + c_k}{b_{k+1}} \qquad \cdots\cdots タ〜テ$$

となる。よって，b_{k+2} は

$$b_{k+2} = (c_k + b_{k+1})\cdot\frac{1}{c_{k+1}} = \frac{(c_k + b_{k+1})b_{k+1}}{b_k + c_k} \qquad \cdots\cdots ト，ナ，ニ$$

と表される。

ここに仮定⑤を用いれば，

$$b_{k+2} = \frac{(c_k + b_k)b_{k+1}}{b_k + c_k} = b_{k+1}$$

これは，④が $n = k+1$ のときも成立することを示している。

以上より，すべて自然数 n に対して，④，すなわち，$b_1 = 3$ と合わせて，③が成立することが示された。

次に，②で n を $2n-1$ に置き換えた

$$a_{2n+2} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{a_{2n+1}} \text{ と } a_{2n-1} = b_n = 3,\quad a_{2n} = c_n,$$

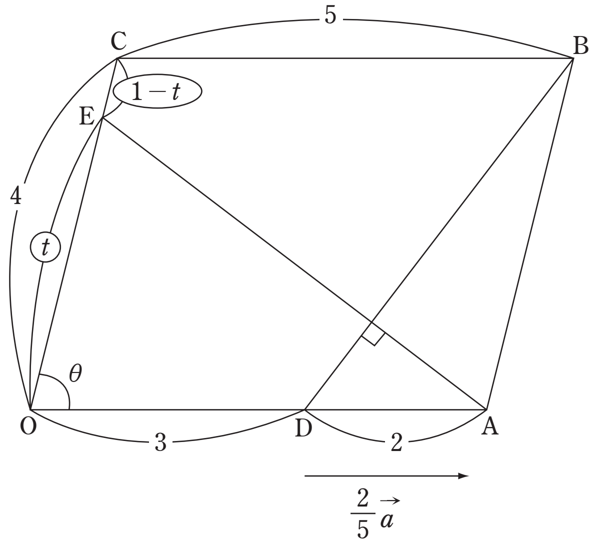
$$a_{2n+1} = b_{n+1} = 3,\quad a_{2n+2} = c_{n+1} \quad \text{より，}$$

$$c_{n+1} = \frac{3 + c_n}{3} = \frac{1}{3}c_n + 1$$

が成り立つ。これと，$c_1 = a_2 = 3$ より　……ヌ

数列 $\{c_n\}$ は数列 $\{p_n\}$ と等しい。

第 4 問



（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=t\vec{c}-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\underline{\underline{\frac{2}{5}}}\vec{a}+\vec{c}$　……ア，イ

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta$

$=5\cdot 4\cos\theta$

$=\underline{\underline{20}}\cos\theta$　……ウエ

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\underline{\underline{0}}$ により，　……オ

$$\left(t\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}\right)=0$$

$$\frac{2}{5}t\vec{c}\cdot\vec{a}+t|\vec{c}|^2-\frac{2}{5}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$\left(\frac{2}{5}\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\right)t=\frac{2}{5}|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

よって，

$$\left(\frac{2}{5}\cdot 20\cos\theta+4^2\right)t=\frac{2}{5}\cdot 5^2+20\cos\theta$$

$$8(\cos\theta+2)\,t=10(2\cos\theta+1)$$

これより，

$$t=\underline{\underline{\frac{5(2\cos\theta+1)}{4(\cos\theta+2)}}}\quad\cdots\cdots①$$　……カ～ケ

（２）　E が線分 OC 上にあるとき，$0 \leqq t \leqq 1$ である。

$r = \cos\theta$ とすると $(0 < \theta < \pi$ より，$-1 < r < 1$ である），

$$(\text{①の右辺}) = \frac{5(2r+1)}{4(r+2)}$$

であるが，$-1 < r < 1$ より，この分母 $4(r+2)$ は正である。

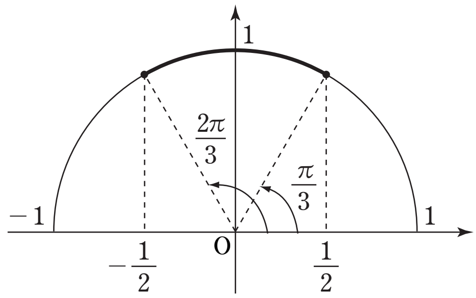
よって，$0 \leqq t \leqq 1$ となる r は

$$0 \leqq 5(2r+1) \leqq 4(r+2) \quad \cdots\cdots②$$

を満たすもので，

$0 \leqq 5(2r+1)$　より，$-\dfrac{1}{2} \leqq r$

$5(2r+1) \leqq 4(r+2)$　より，$r \leqq \dfrac{1}{2}$



これより，

$$-\frac{1}{2} \leqq r \leqq \frac{1}{2}$$

つまり，$0 < \theta < \pi$ で

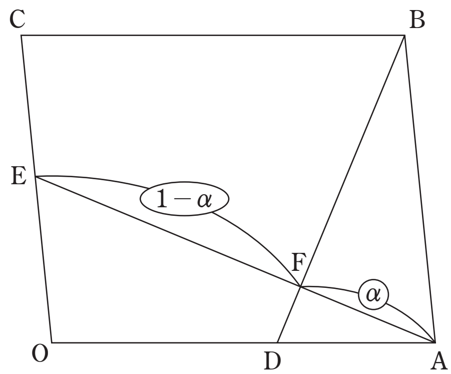
$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{2}$$

であるから，θ のとり得る値の範囲は，

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}} \leqq \theta \leqq \underline{\underline{\frac{2}{3}}}\pi$$

……コ，サ，シ

（３）　$\cos\theta = -\dfrac{1}{8}$ のとき，これを①に用いて，



$$t = \frac{5}{4} \cdot \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+1}{-\frac{1}{8}+2}$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{-\frac{1}{4}+1}{\frac{15}{8}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots ス，セ$$

となる。このとき

$$AF : FE = \alpha : (1-\alpha)$$

とおくと，

$$\overrightarrow{OF} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OE}$$

$$= (1-\alpha)\vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{c} \quad \cdots\cdots③$$

また，

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \beta\overrightarrow{DB}$$

$$=\frac{3}{5}\vec{a}+\beta\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\beta\right)\vec{a}+\beta\vec{c} \quad \cdots\cdots ④$$

$\vec{a}$，$\vec{c}$ は一次独立であるから，③，④より，$\vec{a}$ と $\vec{c}$ の係数を比較して，

$$\begin{cases} 1-\alpha=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\beta \\ \dfrac{\alpha}{2}=\beta \end{cases}$$ これを解いて，$\alpha=\dfrac{1}{3}$

（ α，β の一方が求まれば，③，④から $\overrightarrow{OF}$ が出るので，α，β を 2 つとも出す必要はない。なお，$\beta=\dfrac{1}{6}$ ）

これを③に用いて，

$$\overrightarrow{OF}=\frac{2}{\underline{\underline{3}}}\vec{a}+\frac{1}{\underline{\underline{6}}}\vec{c}$$ ……ソ～ツ

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ に注意して，

$$\overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}}{3}$$

より，F は線分 AE を $1:\underline{\underline{2}}$ に内分する。 ……テ

ここで，平行四辺形 OABC の面積（これを S とする）は，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

なので，

$$S=|\vec{a}||\vec{c}|\sin\theta=5\cdot4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\underline{\underline{\frac{15\sqrt{7}}{2}}}$$ ……ト～ヌ

また，E を通り OA と平行な直線を AB の交点を E′ とおくと，

$\triangle OAE=\triangle AEE'=\triangle EE'B=\triangle CEB$

であるから，

$\triangle OAE+\triangle CEB=\dfrac{1}{2}S$

よって，

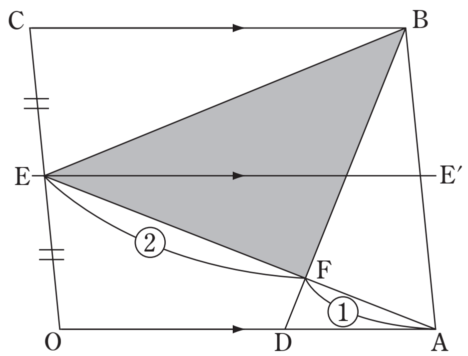
$\triangle AEB=S-(\triangle OAE+\triangle CEB)=\dfrac{1}{2}S$

これと，

$\triangle BEF=\dfrac{2}{3}\triangle AEB$

より，

$\triangle BEF=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{15\sqrt{7}}{2}=\underline{\underline{\dfrac{5\sqrt{7}}{2}}}$ ……ネ，ノ，ハ



〈（3）テの別解〉

直線 OC と直線 BD の交点を D′ とおくと，△ODD′ ∽ △ADB で，相似比は

$$\mathrm{OD'}:\mathrm{AB}=\mathrm{OD}:\mathrm{AD}=3:2$$

よって，OD′＝6

また，△ED′F ∽ △ABF で相似比は

$$\mathrm{ED'}:\mathrm{AB}=(2+6):4=2:1$$

よって，EF：FA＝2：1

であるから，点 F は線分 AE を

1：$\underline{\underline{2}}$　……テ

に内分する。