試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

Z

数　学　②〔数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学B〕

（100点 60分）

工業数理基礎，簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は，大学入試センター試験の出願時に，それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

Ⅰ　注　意　事　項

1　解答用紙に，正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがあります。特に，解答用紙の**解答科目欄にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，0点**となることがあります。

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出　題　科　目	ページ	選　択　方　法
数　学　Ⅱ	4～14	左の2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅱ・数学B	15～33	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

4　選択問題については，解答する問題を決めたあと，その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし，**指定された問題数をこえて解答してはいけません。**

5　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

6　**不正行為について**

①　不正行為に対しては厳正に対処します。

②　不正行為に見えるような行為が見受けられた場合は，監督者がカードを用いて注意します。

③　不正行為を行った場合は，その時点で受験を取りやめさせ退室させます。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

Ⅱ　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(−)，数字(0〜9)，又は文字(a〜d)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に $-8a$ と答えたいとき

ア	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
イ	⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	a	b	c	d
ウ	⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●	b	c	d

なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔１〕　Oを原点とする座標平面上に2点A(6, 0), B(3, 3)をとり，線分ABを2：1に内分する点をP，1：2に外分する点をQとする。3点O, P, Qを通る円をCとする。

(1)　Pの座標は$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$であり，Qの座標は$\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エオ}}\right)$である。

(2)　円Cの方程式を次のように求めよう。線分OPの中点を通り，OPに垂直な直線の方程式は

$$y = \boxed{\text{カキ}}\,x + \boxed{\text{ク}}$$

であり，線分PQの中点を通り，PQに垂直な直線の方程式は

$$y = x - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

これらの2直線の交点が円 C の中心であることから，円 C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{コ}}\right)^2+\left(y+\boxed{\text{サ}}\right)^2=\boxed{\text{シス}}$$

であることがわかる。

(3) 円 C と x 軸の二つの交点のうち，点Oと異なる交点をRとすると，Rは線分OAを $\boxed{\text{セ}}$ ：1に外分する。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 連立方程式

$$(*)\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2} \\ \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}=\dfrac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数 x，y，z を求めよう。ただし，$x \leqq y \leqq z$ とする。

$X=2^x$，$Y=2^y$，$Z=2^z$ とおくと，$x \leqq y \leqq z$ により $X \leqq Y \leqq Z$ である。(*)から，X，Y，Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ=\boxed{\text{ソ}} \\ X+Y+Z=\dfrac{35}{2} \\ XY+YZ+ZX=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \end{cases}$$

が得られる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

この関係式を利用すると，t の 3 次式 $(t-X)(t-Y)(t-Z)$ は

$$(t-X)(t-Y)(t-Z)=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ$$

$$=t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}t-\boxed{\text{ソ}}$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\boxed{\text{テ}}\right)\left(t-\boxed{\text{トナ}}\right)$$

となる。したがって，$X \leqq Y \leqq Z$ により

$$X=\frac{1}{2},\quad Y=\boxed{\text{テ}},\quad Z=\boxed{\text{トナ}}$$

となり，$x=\log_{\boxed{\text{ニ}}}X$，$y=\log_{\boxed{\text{ニ}}}Y$，$z=\log_{\boxed{\text{ニ}}}Z$ から

$$x=\boxed{\text{ヌネ}},\quad y=\boxed{\text{ノ}},\quad z=\boxed{\text{ハ}}$$

であることがわかる。

第２問 （配点　30）

a を正の実数として，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3$$

とする。

関数 $y = f(x)$ は，$x = \boxed{\text{アイ}}$ で極大値 $\boxed{\text{ウ}}\, a^{\boxed{\text{エ}}}$ をとり，$x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カ}}\, a^{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。このとき，２点

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\, a^{\boxed{\text{エ}}}\right),\ \left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\, a^{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

と原点を通る放物線

$$y = \boxed{\text{ク}}\, x^2 - \boxed{\text{ケ}}\, a^{\boxed{\text{コ}}}\, x$$

を C とする。原点における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{サシ}}\, a^{\boxed{\text{ス}}}\, x$$

である。また，原点を通り ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$y = \frac{1}{\boxed{\text{セ}}\, a^{\boxed{\text{ソ}}}}\, x$$

である。

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線

$$y = -\boxed{\text{ク}}\,x^2 + \boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$$

を D とする。D と ℓ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\,a^{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は，0 と $\dfrac{4a^{\boxed{\text{ト}}}+1}{2a^{\boxed{\text{ナ}}}}$ である。C と m で囲まれた図形の面積を T とする。$S=T$ となるのは $a^{\boxed{\text{テ}}} = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときであり，このとき，$S = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

第3問 （配点　20）

a を $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin(x - 2a) + \sin(x - a) + \sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とする。

(1) 加法定理を用いると

$$f(x) = \left(\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} \cos a + \boxed{\text{ウ}} \cos 2a \right) \sin x$$

となる。さらに，2倍角の公式を用いると

$$f(x) = \left(\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}} \cos a + \boxed{\text{キ}} \cos^2 a \right) \sin x \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる。

(2) すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つ場合を考える。このとき，a の値を求めよう。

まず，② により，すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つのは

$$\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}} \cos a + \boxed{\text{キ}} \cos^2 a = 0$$

のときである。よって，$0 < a < \frac{\pi}{2}$ から

$$\cos a = \frac{\boxed{\text{クケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

であるので，すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つような a がただ一つ定まることがわかる。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

次に，すべての実数xに対して$f(x)=0$であるから，特に，$x=\dfrac{a}{2}$のとき，

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$である。これにより，①から，$\sin\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}a\right)=0$がわかる。

したがって，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$に注意すると，$a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$である。

(3)　$a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$のときの$\cos\dfrac{a}{2}$の値を求めよう。まず，$a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$の

とき，③が成り立つから

$$\cos 2a=-\frac{\boxed{\text{タ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であることがわかる。したがって，$\cos\dfrac{a}{2}=-\cos\left(\pi-\dfrac{a}{2}\right)$を利用すると

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{\boxed{\text{テ}}+\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

第4問 (配点 20)

p, q を実数として, x の3次式 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3+px^2+qx+30$$

とする。

(1) $f(x)$ の x に虚数 $3+i$ を代入すると

$$f(3+i)=\boxed{\text{ア}}\,p+\boxed{\text{イ}}\,q+48+\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+q+\boxed{\text{エオ}}\right)i$$

となる。

(2) 3次方程式 $f(x)=0$ の一つの解が $3+i$ であるとき, 他の解を求めよう。

$3+i$ が方程式 $f(x)=0$ の解であるから

$$\boxed{\text{ア}}\,p+\boxed{\text{イ}}\,q+48=0,\qquad \boxed{\text{ウ}}\,p+q+\boxed{\text{エオ}}=0$$

となり, p, q の値は

$$p=-\boxed{\text{カ}},\quad q=-\boxed{\text{キ}}$$

である。このとき, $f(x)$ を因数分解すると

$$f(x)=\left(x+\boxed{\text{ク}}\right)\left(x^2-\boxed{\text{ケ}}\,x+\boxed{\text{コサ}}\right)$$

となり, 方程式 $f(x)=0$ の他の解は

$$\boxed{\text{シス}},\quad \boxed{\text{セ}}-i$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(3)　3 次方程式 $f(x)=0$ が実数解 -5 と二つの虚数解 α，β をもつとする。このとき，$\alpha^2+\beta^2$ を p を用いて表し，$\alpha^2+\beta^2$ のとり得る値の範囲を求めよう。

-5 が方程式 $f(x)=0$ の解であることから

$$q=5p-\boxed{\text{ソタ}}$$

が成り立つ。したがって，$f(x)$ は p を用いて

$$f(x)=(x+5)\left\{x^2+\left(p-\boxed{\text{チ}}\right)x+\boxed{\text{ツ}}\right\}$$

と表される。このとき，方程式

$$x^2+\left(p-\boxed{\text{チ}}\right)x+\boxed{\text{ツ}}=0$$

が虚数解 α，β をもつような p のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{テ}}-\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}<p<\boxed{\text{テ}}+\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}} \quad \cdots ①$$

である。

解と係数の関係により，$\alpha^2+\beta^2$ は p を用いて

$$\alpha^2+\beta^2=p^2-\boxed{\text{ニヌ}}p+\boxed{\text{ネノ}} \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。

したがって，① と ② により，$\alpha^2+\beta^2$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ハヒフ}}\leqq\alpha^2+\beta^2<\boxed{\text{ヘホ}}$$

である。

（下 書 き 用 紙）