2014 年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅠA〉

第1問

〔1〕

(1) $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ のとき，

$$ab=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\frac{1^2-(\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1-3}{1-2}=\underline{\underline{2}}$$ ……ア

$$a+b=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})+(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{6}}{-1}=-2+2\sqrt{6}=\underline{\underline{2}}(\underline{\underline{-1}}+\sqrt{\underline{\underline{6}}})$$ ……イ，ウエ，オ

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$=(-2+2\sqrt{6})^2-2\cdot2$$
$$=4-8\sqrt{6}+24-4$$
$$=24-8\sqrt{6}=\underline{\underline{8}}(\underline{\underline{3}}-\sqrt{\underline{\underline{6}}})$$ ……カ，キ，ク

(2) $a^2+b^2+4(a+b)=(24-8\sqrt{6})+4(-2+2\sqrt{6})=\underline{\underline{16}}$ ……ケコ

この両辺に a^2 をかけると，

$a^4+a^2b^2+4a^3+4a^2b=16a^2$

これより，

$a^4+(ab)^2+4a^3+4a\cdot ab=16a^2$

ここで，$ab=2$ であるから，

$a^4+2^2+4a^3+4a\cdot2=16a^2$

よって，

$a^4+\underline{\underline{4}}a^3-\underline{\underline{16}}a^2+\underline{\underline{8}}a+\underline{\underline{4}}=0$ ……サ，シス，セ，ソ

これが，a が満たす方程式である。

〔2〕

$5<\sqrt{n}<6$ より，$25<n<36$ であるから，

$U=\{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35\}$　……①

よって，U の部分集合である P，Q，R，S は，

$P=\{28,\ 32\}$　……②

$Q=\{30,\ 35\}$　……③

$R=\{30\}$　……④

$S=\{28,\ 35\}$　……⑤

さらに，これらの補集合 $\overline{P}$，$\overline{Q}$，$\overline{R}$，$\overline{S}$ は，

$\overline{P}=\{26,\ 27,\ 29,\ 30,\ 31,\ 33,\ 34,\ 35\}$　……⑥

$\overline{Q}=\{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$　……⑦

$\overline{R}=\{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35\}$　……⑧

$\overline{S}=\{26,\ 27,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$　……⑨

(1)　①より，U の要素の個数は 10 個　……タチ

(2)　②，④より，$P\cap R=\varnothing$

②，⑤より，$P\cap S=\{28\}$

③，④より，$Q\cap R=\{30\}$

②，⑦より，$P\cap\overline{Q}=\{28,\ 32\}$

④，⑦より，$R\cap\overline{Q}=\varnothing$

よって答えは，⓪，④　……ツ，テ

(3)　②，④より，$P\cup R=\{28,\ 30,\ 32\}$ であるから，⑦よりこれは $\overline{Q}$ の部分集合ではない。

⑤，⑦より，$S\cap\overline{Q}=\{28\}$ であるから，②よりこれは P の部分集合である。

⑦，⑨より，$\overline{Q}\cap\overline{S}=\{26,\ 27,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$ であるから，⑥よりこれは $\overline{P}$ の部分集合ではない。

⑥，⑦より，$\overline{P}\cup\overline{Q}=\{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35\}$ であるから，⑨よりこれは $\overline{S}$ の部分集合ではない。

⑧，⑨より，$\overline{R}\cap\overline{S}=\{26,\ 27,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$ であるから，⑦よりこれは $\overline{Q}$ の部分集合である。

よって答えは，①，④　……ト，ナ

((3) の一部別解)

②~④の補集合間の包含関係については，以下のようにして，元の集合間の包含関係に直して考えることができる。

②で，「$\overline{Q}\cap\overline{S}\subset\overline{P}$」と「$\overline{\overline{Q}\cap\overline{S}}\supset\overline{\overline{P}}$」は同値である。ド・モルガンの法則により，これはさらに，「$\overline{\overline{Q}}\cup\overline{\overline{S}}\supset\overline{\overline{P}}$」つまり，「$Q\cup S\supset P$」と同値であるから，②，③，⑤より，これは成り立たない。

③では，「$\overline{P}\cup\overline{Q}\subset\overline{S}$」は，「$\overline{\overline{P}\cup\overline{Q}}\supset\overline{\overline{S}}$」つまり，「$P\cap Q\supset S$」と同値であるから，②，③，⑤より，これは成り立たない。

④では，「$\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$」は，「$\overline{\overline{R}\cap\overline{S}}\supset\overline{\overline{Q}}$」つまり，「$R\cup S\supset Q$」と同値であるから，③，④，⑤より，これは成り立つ。

第2問

$y=x^2+2ax+3a^2-6a-36=f(x)$ とおく。

$f(x)=(x+a)^2-a^2+3a^2-6a-36$

$\quad =(x+a)^2+2a^2-6a-36$

より，G の頂点の座標は，$(\underline{-}a,\ \underline{2}a^2-\underline{6}a-\underline{36})$　……ア，イ，ウ，エオ

また，$p=f(0)=3a^2-6a-36$ である。

(1)　$p=-27$ のとき，

$3a^2-6a-36=-27$ より，$3a^2-6a-9=0$

$a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$

よって，$a=\underline{3},\ \underline{-1}$　……カ，キク

G の頂点の座標は，

$a=3$ のとき，$(-3,\ -36)$

$a=-1$ のとき，$(1,\ -28)$

であるから，この 2 点の座標を比べると，

x 軸方向に，$1-(-3)=\underline{4}$　……ケ

y 軸方向に，$-28-(-36)=\underline{8}$　……コ

だけ平行移動したことがわかる。

(2)　G が x 軸と共有点を持つことは，G が下に凸な放物線であることから，

(G の頂点の y 座標)$\leqq 0$ と同値である。

$2a^2-6a-36\leqq 0$

これより，$a^2-3a-18\leqq 0$

$(a+3)(a-6)\leqq 0$

よって，$\underline{-3}\ \leqq\ a\ \leqq\ \underline{6}$　……サシ，ソ

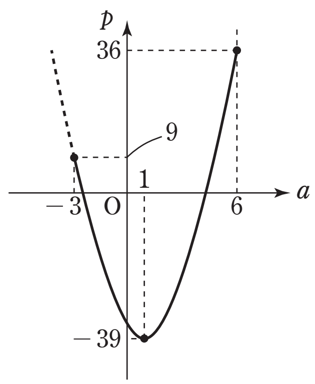
(…③)(…③)　……ス，セ

ところで，$p=3a^2-6a-36=3(a-1)^2-39$ であるから，

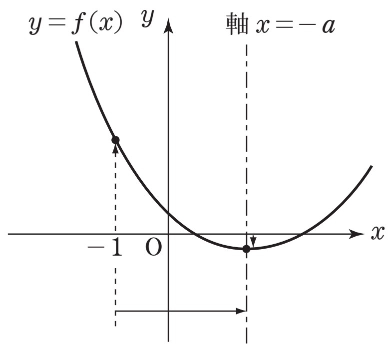
これを $p(a)$ とおくと，$-3\leqq a\leqq 6$ における

$p(a)$ の最小値は，$p(\underline{1})=\underline{-39}$　……タ，チツテ

$p(a)$ の最大値は，$p(\underline{6})=\underline{36}$　……ト，ナニ



また，G が x 軸と共有点を持ち，すべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるための条件は，右図より，



$$\begin{cases} f(-1)>0 & \cdots\cdots③ \\ (G\text{の軸})\ x=-a>-1 & \cdots\cdots④ \\ (G\text{の頂点の}\ y\ \text{座標})\leqq 0 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

である。

③より，$3a^2-8a-35>0$

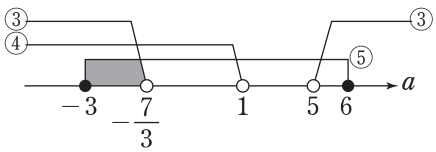
これより，$(3a+7)(a-5)>0$

よって，$a<-\dfrac{7}{3}$，$5<a$

④より，$a<1$

⑤より，(**サシ，ス，セ，ソ**より) $-3\leqq a\leqq 6$

よって右図より，答えは，

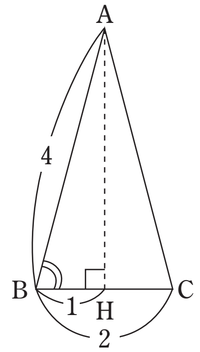


$$\underline{\underline{-3}} \leqq a < \frac{-7}{\underline{\underline{3}}} \quad \cdots\cdots\text{ヌネ，ヒフ，ヘ}$$

↑　↑

(…③)(…①)　……**ノ，ハ**

第３問



A から BC に下ろした垂線を AH とすると，AB＝4，$\cos\angle ABC = \dfrac{1}{4}$ より，BH＝1。

ここで，BC＝2＝2BH であるから，△ABC は右図のような二等辺三角形である。

よって，CA＝AB＝$\underline{\underline{4}}$ ……ア

余弦定理より，

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{4^2+4^2-2^2}{2\cdot4\cdot4} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$ ……イ，ウ

よって，$\sin\angle BAC = \sqrt{1-\cos^2\angle BAC} = \sqrt{1-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{15}{64}} = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{15}}{8}}}$ ……エオ，カ

また，△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により，

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2\cdot\frac{8}{\sqrt{15}}$$

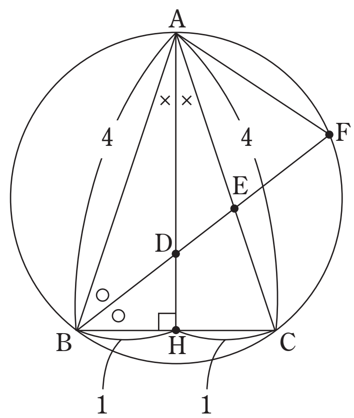
よって，$R = \dfrac{8}{\sqrt{15}} = \underline{\underline{\dfrac{8\sqrt{15}}{15}}}$ ……キ，クケ，コサ

（アの別解）　余弦定理より，

$$CA^2 = AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC = 4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{4} = 16$$

よって，CA＝$\underline{\underline{4}}$ ……ア

(1)　題意を図に示すと，右のようになる。



角の二等分線の性質より，

AE : CE＝BA : BC＝2 : 1

よって，$AE = \dfrac{2}{2+1}AC = \dfrac{2}{3}\cdot4 = \underline{\underline{\dfrac{8}{3}}}$ ……シ，ス

△ABE にて余弦定理より，

$$BE^2 = AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cos\angle BAC$$
$$= 4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{40}{9}$$

よって，$BE = \underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{10}}{3}}}$ ……セ，ソタ，チ

再び，角の二等分線の性質より

$$BD:ED = AB:AE = 4:\frac{8}{3} = 3:2$$

よって，$\mathrm{BD}=\dfrac{3}{3+2}\mathrm{BE}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{3}=\underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{10}}{5}}}$　……ツ，テト，ナ

(2)　$\triangle\mathrm{EBC}$ と $\triangle\mathrm{EAF}$ において，円周角の定理より，$\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{EAF}$
対頂角より，$\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{AEF}$
よって二角相等により，$\triangle\mathrm{EBC}\backsim\triangle\mathrm{EAF}$
$\triangle\mathrm{EBC}$ と $\triangle\mathrm{EAF}$ の相似比は，$\mathrm{BE}:\mathrm{AE}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}:\dfrac{8}{3}=\sqrt{10}:4$ であるから，面積比は

$$\triangle\mathrm{EBC}:\triangle\mathrm{EAF}=(\sqrt{10})^2:4^2=5:8$$

$$\triangle\mathrm{EBC}=\frac{5}{8}\triangle\mathrm{EAF}$$

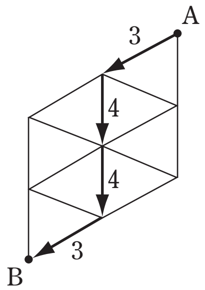
よって答えは，$\underline{\underline{\dfrac{5}{8}}}$倍。　……ニ，ヌ

(3)　$\angle\mathrm{FBA}=\angle\mathrm{FBC}$ より，$\overset{\frown}{\mathrm{FA}}=\overset{\frown}{\mathrm{FC}}$　よって，$\mathrm{FA}=\mathrm{FC}$　……①
また，$\angle\mathrm{FAE}=\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{ABD}$，$\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{BAD}$ であるから，

$$\angle\mathrm{FAE}+\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{ABD}+\angle\mathrm{BAD}$$

これより，$\angle\mathrm{FAD}=\angle\mathrm{FDA}$ であるから，$\mathrm{FA}=\mathrm{FD}$　……②
①，②より，$\mathrm{FA}=\mathrm{FC}=\mathrm{FD}$　……$\underline{\underline{④}}$　……ネ

第４問

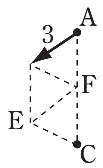


(1)　4回の移動のうち，3の矢印の方向の2回の移動を決めれば，残りの2回は自動的に4の矢印の方向の移動に決まる。

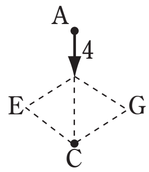
よって答えは，$_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=\underline{\underline{6}}$（通り）　……ア

(2)　初めにAから1または2または6の方向に移動すると，あと2回の移動でCに行くことはできない。

㋐　初めに3の方向に移動する場合。
右図のE経由かF経由かで2通りの行き方がある。



㋑　初めに4の方向に移動する場合。
右図のE経由かG経由かで2通りの行き方がある。

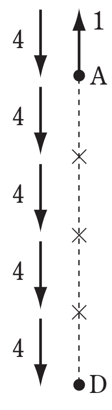


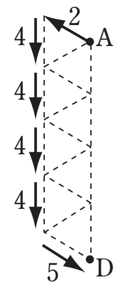
㋒　初めに5の方向に移動する場合。
対称性から，㋐と同様に2通りの行き方がある。
以上により，$2+2+2=\underline{\underline{6}}$（通り）　……イ

(3)　3回でCからDへ移動する仕方も，(2)と同様6通りあるから，
答えは，$6\times6=\underline{\underline{36}}$（通り）　……ウエ

6回の移動の仕方は全部で6^6（通り）あり，それぞれが同様に確からしいから，求める確率は，$\dfrac{36}{6^6}=\underline{\underline{\dfrac{1}{1296}}}$　……オ，カキクケ

(4)　AからDへ6回で移動する移動の仕方のうち，
・1の矢印の向きの移動を含むものは，右図のように，残り5回はすべて4の矢印の方向への移動となるから，(1，4，4，4，4，4)の順列を考えて，$\dfrac{6!}{5!}=\underline{\underline{6}}$（通り）　……コ





・2 の矢印の向きの移動を含むものは，右図のように，残り 5 回のうち 1 回は 5，4 回は 4 の矢印の方向への移動となるから，

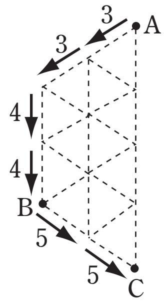
(2，5，4，4，4，4) の順列を考えて，$\dfrac{6!}{4!}=\underline{\underline{30}}$ (通り)　……**サシ**

・6 の矢印の向きの移動を含むものは，対称性から (**サシ**) と同様に，30 (通り)

・上記以外の 4 の矢印の向きの移動は $\underline{\underline{2}}$ 回　……**ス**

だけに決まり (たとえば右図)，このとき，残りの 4 回のうち 2 回は 3，2 回は 5 の矢印の方向への移動となるから (4，4，3，3，5，5) の順列を考えて，

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=\underline{\underline{90}}$ (通り)　……**セソ**



以上により，6 回で A から D に移動する移動の仕方は，全部で

$6+30+30+90=\underline{\underline{156}}$ (通り)　……**タチツ**