2014年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅡB〉

第1問

〔1〕(1)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通り l に垂直な直線を m とすると，

(l の傾き)・(m の傾き)$=-1$ より，

$$\frac{4}{3}\cdot(m\text{ の傾き})=-1$$

よって，(m の傾き)$=-\dfrac{3}{4}$

これより，m の方程式は，(P を通るので)

$$y=-\frac{3}{\underline{\underline{4}}}(x-p)+q \qquad \cdots\cdots ア，イ$$

Q は m と l の交点なので，

$$\begin{cases} y=\dfrac{4}{3}x \\ y=-\dfrac{3}{4}(x-p)+q \qquad \left(y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}p+q\right) \end{cases}$$

より，

$$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}p+q$$

よって，

$$16x=-9x+9p+12q$$
$$25x=9p+12q$$

ゆえに，$x=\dfrac{3}{25}(3p+4q)$

これと，$y=\dfrac{4}{3}x$ より，$y=\dfrac{4}{25}(3p+4q)$ となるから，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{25}(\underline{\underline{3}}p+\underline{\underline{4}}q),\ \frac{4}{25}(3p+4q)\right) \qquad \cdots\cdots ウ，エ$$

求める C の半径 r は，$\mathrm{P}(p,\ q)$ と l との距離なので，l:$4x-3y=0$ に注意して，点と直線の距離の公式から，

$$r=\frac{|4\cdot p-3\cdot q|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|4p-3q|}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}\,|\underline{\underline{4}}p-\underline{\underline{3}}q| \quad \cdots\cdots① \qquad \cdots\cdots オ，カ$$

（オ，カの別解）

P，Q の座標から直接 PQ の距離を求めてもよい。

$$r=\sqrt{\left\{p-\frac{3}{25}(3p+4q)\right\}^2+\left\{q-\frac{4}{25}(3p+4q)\right\}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{16}{25}p-\frac{12}{25}q\right)^2+\left(-\frac{12}{25}p+\frac{9}{25}q\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{4^2}{25^2}(4p-3q)^2+\frac{3^2}{25^2}(4p-3q)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4^2}{25^2}+\frac{3^2}{25^2}\right)(4p-3q)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{25}(4p-3q)^2}=\frac{1}{5}|\underline{\underline{4}}p-\underline{\underline{3}}q| \quad \cdots\cdots①$$ ……オ，カ

(2)　円 C が x 軸に接することから，C の半径 r は P の y 座標 q に等しく，①から，

$$q=\frac{|4p-3q|}{5}$$

(i)　$4p-3q>0$ のとき，

$$q=\frac{4p-3q}{5}$$

つまり，$5q=4p-3q$

よって，$4p=8q$ より，$p=2q$

(ii)　$4p-3q<0$ のとき，

$$q=\frac{-(4p-3q)}{5}$$

つまり，$-5q=4p-3q$

よって，$4p=-2q$ であるが，これは $p>0$，$q>0$ に反する。

以上から，$p=\underline{\underline{2}}q$ ……キ

このことから，C は中心の座標が $(2q,\ q)$，半径 q の円なので，C の方程式は

$(x-2q)^2+(y-q)^2=q^2$　……（＊）

（＊）が R$(2,\ 2)$ を通ることから，

$(2-2q)^2+(2-q)^2=q^2$

$4q^2-12q+8=0$

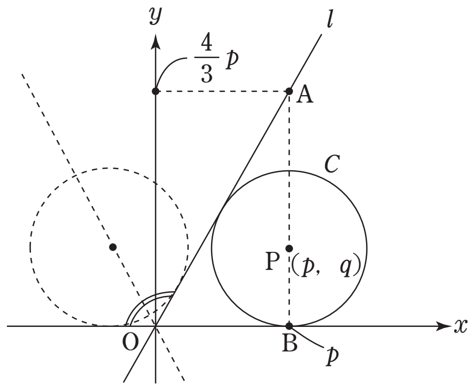
$(q-1)(q-2)=0$

これより，$q=1$ または 2 なので，（＊）より，

$q=1$ のとき，$(x-\underline{\underline{2}})^2+(y-\underline{\underline{1}})^2=\underline{\underline{1}}$　……② ……ク，ケ，コ

$q=2$ のとき，$(x-\underline{\underline{4}})^2+(y-\underline{\underline{2}})^2=\underline{\underline{4}}$　……③ ……サ，シ，ス

（注）　(2) の**キ**については，$p>0$，$q>0$ のときは C の中心が l の下側にあることがわかる。また，C が l の上側（点線の円）にあるときは，C の中心は図の $\angle\mathrm{AOB}$ の外角の 2 等分線上にあるので，$p<0$，$q>0$ となる。



このとき，図より，p，q について，

$$\frac{4}{3}p>q$$

つまり，$4p-3q>0$ とわかる。

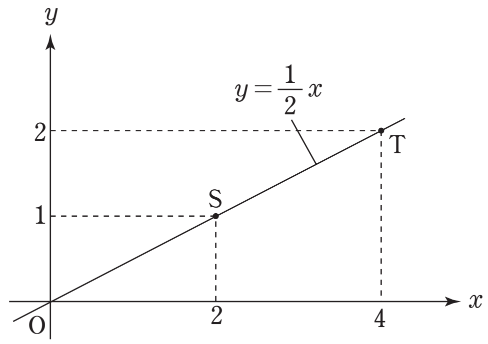
(3)　②，③より，S (2，1)，T (4，2) と右図から，

OS：ST＝1：1

であり，O は ST の S 側の延長上にあるので，点 O は線分 ST を

1：2　(……④)　……**セ**

に外分する。



〔2〕　$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leqq 3$　……④

より，

$3\log_2 m + 2\log_3 n \leqq 3$　……（＊＊）

・$m=2$，$n=1$ のとき，（＊＊）より，

$3\log_2 2 + 2\log_3 1 = 3\cdot 1 + 2\cdot 0 = 3$　……ソ

であり，$(m,\ n)=(2,\ 1)$ は④を満たす。

・$m=4$，$n=3$ のとき，（＊＊）より，

$3\log_2 4 + 2\log_3 3 = 3\cdot\log_2 2^2 + 2\cdot 1$

$= 3\cdot 2\log_2 2 + 2 = 8$　……タ

であり，$(m,\ n)=(4,\ 3)$ は④を満たさない。

④は，（＊＊）から，

$\log_2 m + \dfrac{2}{3}\log_3 n \leqq 1$　……⑤　……チ，ツ，テ

と変形できる。

n が自然数のとき，$n \geqq 1$ なので，

$\log_3 n \geqq \log_3 1 = 0$

より，$\log_3 n$ の最小値は 0　……ト

これと⑤から，$\log_2 m \leqq 1$ であり，これが成り立つ自然数 m は，

$m=1$　または　$m=2$　……ナ，ニ

でなければならない。

$m=1$ の場合，⑤より，$\log_3 n \leqq \dfrac{3}{2}$　……ヌ，ネ

となるので，$2\log_3 n \leqq 3$，つまり，$\log_3 n^2 \leqq 3$ から，

$n^2 \leqq 27$　……ノハ

となる。これを満たす自然数 n は，$5^2 < 27 < 6^2$ から，

$n \leqq 5$　……ヒ

なので，この場合，④を満たす自然数 m，n の組の個数は 5 である。

$m=2$ の場合，⑤より，

$\log_2 2 + \dfrac{2}{3}\log_3 n \leqq 1$

つまり，$1 + \dfrac{2}{3}\log_3 n \leqq 1$

よって，$\log_3 n \leqq 0$ となるので，これを満たす自然数 n は $n=1$ のみ。

この場合，④を満たす自然数 m，n の組の個数は 1　……フ

以上のことから，④を満たす自然数 m，n の組の個数は，$5+1=6$　……へ

第2問

(1)　$f(x)=x^3-px$ より，

$f'(x)=3x^2-p$　……①　　……ア，イ

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，①より，

$3a^2-p=0$　　……ウ

が成り立ち，$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号は変化することから，$f'(x)=0$ が異なる2つの実数解を持つ。

すなわち，p は条件

$p>0$　(……①)　　……エ

を満たし，逆にこのとき，$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。

(2)　$f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとるとき，$p>0$ であり，$f'\left(\dfrac{p}{3}\right)=0$ を満たすので，①より，

$$3\left(\frac{p}{3}\right)^2-p=0$$

$$\frac{p^2}{3}-p=0$$

$$p(p-3)=0$$

$p>0$ より，$p=3$　　……オ

このとき，$f(x)=x^3-3x$　……(＊) であり，A$(1,\ -2)$ となる。

$f'(x)=3x^2-3$　……(＊＊)

$=3(x^2-1)$

$=3(x+1)(x-1)$

であり，$f'(x)=0$ の2解は，$x=\pm1$ である。

よって，増減表は右表のようになり，

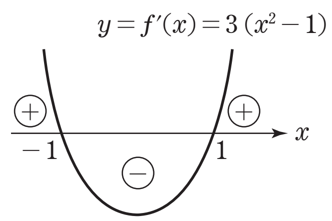
$x=-1$　　……カキ

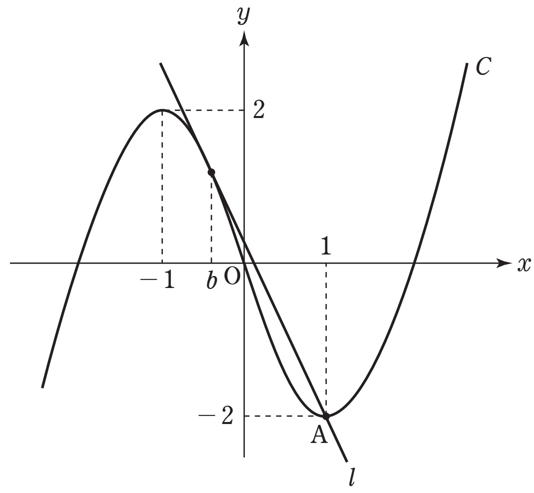
で極大値をとり，

$x=1$　　……ク

で極小値をとる。

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗





次に，点 A (1，−2) を通る，傾きが 0 でない C の接線 l は，接点の x 座標を b とすると，(＊＊) より，

$y=(\underline{\underline{3}}b^2-\underline{\underline{3}})(x-b)+f(b)$ ……ケ，コ

$\quad=(3b^2-3)x-3b^3+3b+b^3-3b$

$\quad=(3b^2-3)x-2b^3$ ……②

これが点 A を通ることから，

$-2=3b^2-3-2b^3$

よって，b は方程式

$\underline{\underline{2}}b^3-\underline{\underline{3}}b^2+1=0$ ……③ ……サ，シ

の解である。

［特に，A での C の接線も
A を通る C の接線の条件を満たすので，
$b=1$ は③の解である．これを用いて，
右の組立除法から③が解ける。］

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\
 & & 2 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 2 & -1 & -1 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 1 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

③は，

$(b-1)^2(2b+1)=0$

より，これを解くと，$b=\underline{\underline{1}}$，$\underline{\underline{\dfrac{-1}{2}}}$ ……ス，セソ，タ

いま，l の傾きが 0 でないことから，$b=-\dfrac{1}{2}$ である。($b=1$ のときは $f'(1)=0$ となるので $b\neq1$ である。)

よって，l の方程式は②で $b=-\dfrac{1}{2}$ として，

$$y=3\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right\}x-2\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$y=\underline{\underline{\dfrac{-9}{4}}}x+\underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$ ……チツ，テ，ト，ナ

次に，A を頂点に持つ放物線は

$$y = k(x-1)^2 - 2$$

で表され，これが原点を通るとき，

$$0 = k(-1)^2 - 2$$

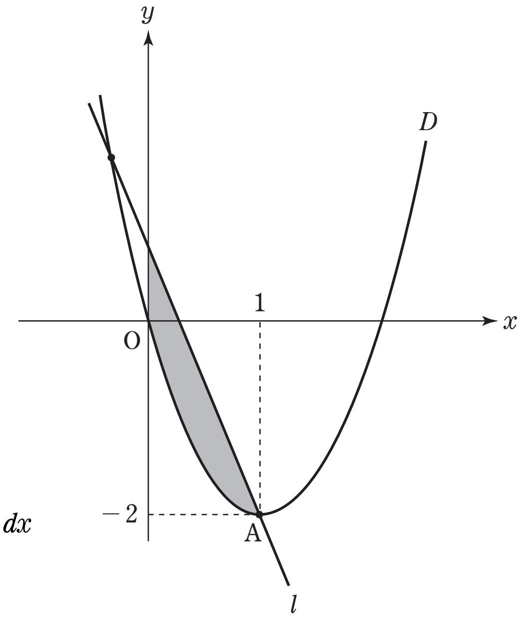
より，$k = 2$

よって，D の方程式は

$$y = 2(x-1)^2 - 2$$

$$= \underline{\underline{2}}x^2 - \underline{\underline{4}}x$$

……ニ，ヌ



求める面積 S は，右図の網目部分の面積なので，

$$S = \int_0^1 \left\{ -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4} - (2x^2 - 4x) \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-2x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{4} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{7}{8} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{11}{24}}}$$

……ネノ

第 3 問

(1)　右のように

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \cdots\cdots & a_n & & a_{n+1} \\ & \underset{9}{+} & & \underset{(9+4)}{+} & & \underset{(9+4\times 2)}{+} & & + & & & \underset{(\text{階差数列の第}n\text{項})}{+} & \end{array}$$

a_2, a_3, a_4, ……

と決まるので,

$a_2 = a_1 + 9$

$\quad = 6 + 9 = \underline{\underline{15}}$ ……アイ

$a_3 = a_2 + (9 + 4)$

$\quad = 15 + 13 = \underline{\underline{28}}$ ……ウエ

また，階差数列は初項 9，公差 4 の等差数列なので，階差数列の第 n 項は

$9 + 4(n-1) = \underline{\underline{4}}n + \underline{\underline{5}}$ ……オ，カ

よって，数列 $\{a_n\}$ は

$a_{n+1} - a_n = 4n + 5$ ……（＊）

を満たすので,（＊）で，n を $1 \sim n-1$ に変えて,（$n \geqq 2$ において）

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 4(n-1) + 5 \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 4(n-2) + 5 \\ &\ \ \vdots \\ a_3 - a_2 &= 4\cdot 2 + 5 \\ a_2 - a_1 &= 4\cdot 1 + 5 \end{aligned}$$

辺々の和をとることで,

$a_n - a_1 = 4\cdot\{1 + 2 + \cdots\cdots + (n-1)\} + 5\cdot(n-1)$

$\quad = 4\cdot\dfrac{n(n-1)}{2} + 5(n-1)$　（これは $n = 1$ でも成立）

よって，$a_1 = 6$ より,

$a_n = 6 + 2n(n-1) + 5n - 5$

$\quad = \underline{\underline{2}}n^{\underline{\underline{2}}} + \underline{\underline{3}}n + \underline{\underline{1}}$ ……①　……キ，ク，ケ，コ

である。

(2)　$b_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n+1} - 1} b_n$ ……②，$b_1 = \dfrac{2}{5}$

で定められる数列 $\{b_n\}$ について，$a_1 = 6$，$a_2 = 15$ より,

$b_2 = \dfrac{a_1}{a_2 - 1} b_1 = \dfrac{6}{15-1}\cdot\dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{\underline{\underline{35}}}$ ……サ，シス

ここで，①より,

$a_n = (2n+1)(n+1)$

であるから,

$$b_{n+1} = \frac{(2n+1)(n+1)}{2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - 1} b_n$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{\{2(n+1)+3\}(n+1)} b_n$$

よって，

$b_{n+1}=\dfrac{2n+1}{\underline{\underline{2n+5}}}b_n$　……③　　……セ，ソ，タ

ここで，

$c_n=(2n+1)b_n$　……④

とおくと，

$c_{n+1}=(2n+3)b_{n+1}$

つまり，$b_{n+1}=\dfrac{c_{n+1}}{2n+3}$

であり，これと③より，

$\dfrac{c_{n+1}}{2n+3}=\dfrac{c_n}{2n+5}$

よって，数列 $\{c_n\}$ について，

$(2n+\underline{\underline{5}})c_{n+1}=(2n+\underline{\underline{3}})c_n$　……（＊＊）　　……チ，ツ

が成り立つ。そこで，さらに，

$d_n=(2n+\underline{\underline{3}})c_n$　……⑤　　……テ

とおくと，$d_{n+1}=(2n+5)c_{n+1}$ となるので，（＊＊）から数列 $\{d_n\}$ は

$d_{n+1}=d_n$　……（＊＊＊）

を満たすことがわかる。

④より，$c_1=(2+1)\cdot b_1=3\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}$ で，⑤より，

$d_1=(2+3)c_1=5\cdot\dfrac{6}{5}=\underline{\underline{6}}$　　……ト

であるから，（＊＊＊）より，

$d_n=6$

とわかる。

よって，⑤から，

$(2n+3)c_n=6$

つまり，$c_n=\dfrac{6}{2n+3}$

これと，④より，

$(2n+1)b_n=\dfrac{6}{2n+3}$

つまり，$b_n=\dfrac{6}{(2n+1)(2n+3)}$　……（☆）

を得る。そこで，X，Y を定数として，

$b_n=\dfrac{X}{2n+1}-\dfrac{Y}{2n+3}$

と変形すると，

$$b_n=\frac{(2X-2Y)n+3X-Y}{(2n+1)(2n+3)}$$

この分子と (☆) の分子の n の係数を比較して，

$$\begin{cases} 2X-2Y=0 \\ 3X-Y=6 \end{cases}$$

より，$X=Y=3$

よって，(☆) は

$$b_n=\frac{3}{\underline{\underline{2n+1}}}-\frac{3}{\underline{\underline{2n+3}}}$$ ……ナ，ニ

と変形できて，これを利用して，(特に $2n+3=2(n+1)+1$ に注意して)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2k+1}-\frac{3}{2(k+1)+1}\right\}$$

$$=\left(\frac{3}{2\cdot1+1}-\cancel{\frac{3}{2\cdot2+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{2\cdot2+1}}-\cancel{\frac{3}{2\cdot3+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{2\cdot3+1}}-\cancel{\frac{3}{2\cdot4+1}}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{3}{2(n-1)+1}}-\cancel{\frac{3}{2n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{2n+1}}-\frac{3}{2(n+1)+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2+1}-\frac{3}{2n+3}$$

$$=1-\frac{3}{2n+3}$$

$$=\frac{2n}{\underline{\underline{2n+3}}}$$ ……ヌ，ネ，ノ

(注)　一般項 b_n については，次のようにすれば簡単に求められる。

③から，

$(2n+5)\,b_{n+1}=(2n+1)\,b_n$

であり，辺々に $(2n+3)$ をかけることで，

$(2n+3)\,(2n+5)\,b_{n+1}=(2n+1)\,(2n+3)\,b_n$

そこで，$B_n=(2n+1)\,(2n+3)\,b_n$ とおくと，

$B_{n+1}=(2n+3)\,(2n+5)\,b_{n+1}$　より，$B_{n+1}=B_n$

よって，

$$B_{n+1}=B_n=B_{n-1}=\cdots\cdots=B_2=B_1=3\cdot5\cdot\frac{2}{5}=6$$

$B_n=(2n+1)\,(2n+3)\,b_n=6$　となり，$b_n=\dfrac{6}{(2n+1)(2n+3)}$

第4問

(1)　各点は右図のようになり，

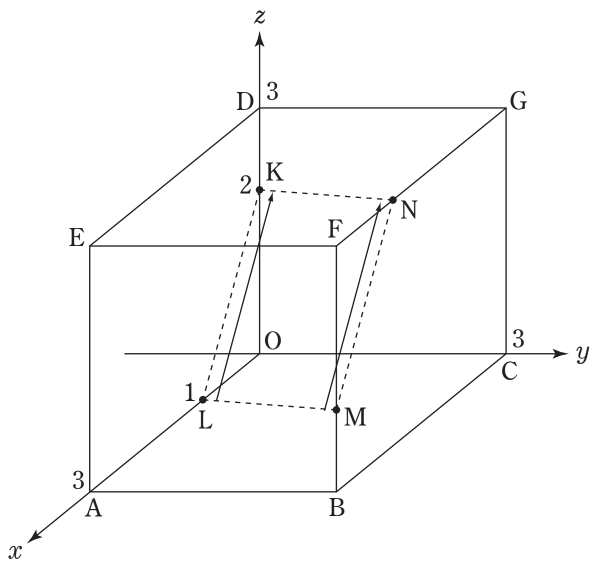
K$(0,\ 0,\ 2)$

L$(1,\ 0,\ 0)$

であるから，

$\overrightarrow{LK}=(-1,\ 0,\ 2)$

……アイ，ウ，エ



四角形KLMNが平行四辺形なので，

$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}$ (……③)

……オ

ここで，M$(3,\ 3,\ s)$，N$(t,\ 3,\ 3)$ （s，tは実数）と表すと，

$\overrightarrow{LK}=(-1,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{MN}=(t-3,\ 0,\ 3-s)$，$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}$

より，

$$\begin{cases} -1=t-3 \\ 2=3-s \end{cases}$$

よって，

$s=1$，$t=2$ ……カ，キ

であるから，M$(3,\ 3,\ 1)$，N$(2,\ 3,\ 3)$

これより，NはFGを$1:2$に内分することがわかる。 ……ク

また，$\overrightarrow{LM}=(2,\ 3,\ 1)$なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}&=(-1,\ 0,\ 2)\cdot(2,\ 3,\ 1)\\&=-1\cdot2+0\cdot3+2\cdot1\\&=0\end{aligned}$$ ……ケ

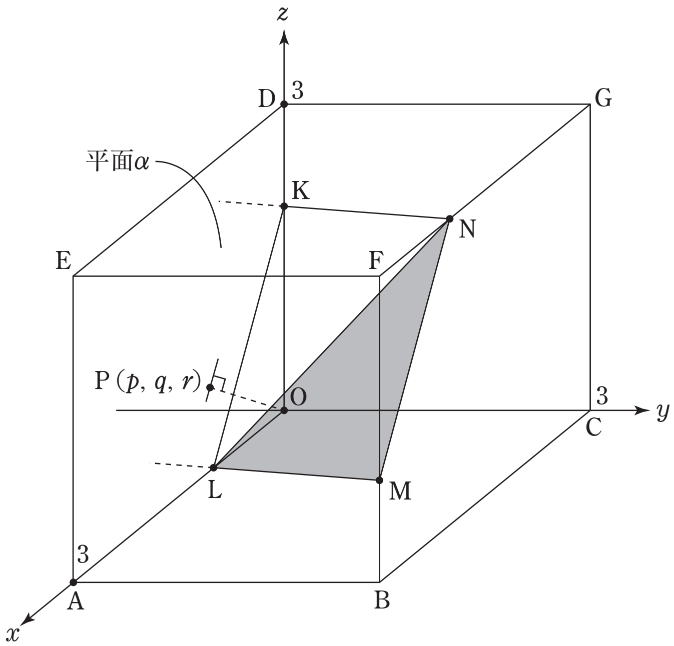
となり，$\overrightarrow{LK}\perp\overrightarrow{LM}$であるから，四角形KLMNは長方形である。

$\left|\overrightarrow{LK}\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$ ……コ

$\left|\overrightarrow{LM}\right|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$ ……サシ

と合わせて，四角形KLMNの面積は

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}=\sqrt{70}$　……(＊) ……スセ



(2)　P は，O から平面 α に下ろした垂線と平面 α の交点である。

このとき，

OP ⊥ LK

OP ⊥ LM

なので，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}=\underline{\underline{0}}$ ……ソ

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=0$ より，$(p,\ q,\ r)\cdot(-1,\ 0,\ 2)=0$

つまり，$-p+0+2r=0$ より $p=\underline{\underline{2}}r$ ……タ

また，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}=0$ より，

$(p,\ q,\ r)\cdot(2,\ 3,\ 1)=0$

つまり，$2p+3q+r=0$

これと，$p=2r$ より，

$2\cdot 2r+3q+r=0$

すなわち，$q=\underline{\underline{\dfrac{-5}{3}}}r$ ……チツ，テ

であることがわかる。

よって，$\mathrm{P}\left(2r,\ -\dfrac{5}{3}r,\ r\right)$

さらに，OP ⊥ PL であることから，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PL}=0$ より，

$\left(2r,\ -\dfrac{5}{3}r,\ r\right)\cdot\left(1-2r,\ \dfrac{5}{3}r,\ -r\right)=0$

$$2r(1-2r)-\left(\frac{5}{3}r\right)^2-r^2=0$$

$$\frac{70}{9}r^2-2r=0$$

$r=0$ のとき $p=0$ となり，平面 α は O を通らないので不適であるから，

$$\frac{70}{9}r=2$$

より，　$r=\underline{\underline{\dfrac{9}{35}}}$　……ト，ナニ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\left(2,\ -\frac{5}{3},\ 1\right)=\frac{9}{35}\left(2,\ -\frac{5}{3},\ 1\right)$$

より，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|&=\frac{9}{35}\sqrt{2^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2+1^2}\\&=\frac{9}{35}\sqrt{\frac{70}{9}}\\&=\frac{9}{35}\cdot\frac{\sqrt{70}}{3}=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{70}}{35}}}\end{aligned}$$

……ヌ，ネノ，ハヒ

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ は，三角錐 OLMN において，三角形 LMN を底辺とみたときの高さであり，

$$(\text{三角形 LMN の面積})=\frac{1}{2}\cdot(\text{四角形 KLMN})=\frac{\sqrt{70}}{2}$$

より，三角錐 OLMN の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{70}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{70}}{35}=\underline{\underline{1}}$$

……フ

である。