

試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

X

数 学 ②

数学Ⅱ

(100点
60分)

工業数理基礎、簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は、大学入試センター試験の出願時に、それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

I 注 意 事 項

- 1 解答用紙に、正しく記入・マークされていない場合は、採点できないことがあります。特に、解答用紙の解答科目欄にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は、0点となることがあります。
- 2 出題科目、ページ及び選択方法は、下表のとおりです。

出 題 科 目	ペ ー ジ	選 択 方 法
数 学 Ⅱ	4~14	左の2科目のうちから1科目を選択し、 解答しなさい。
数学Ⅱ・数学B	15~33	

- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 選択問題については、解答する問題を決めたあと、その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし、指定された問題数をこえて解答してはいけません。
- 5 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 6 不正行為について
 - ① 不正行為に対しては厳正に対処します。
 - ② 不正行為に見えるような行為が見受けられた場合は、監督者がカードを用いて注意します。
 - ③ 不正行為を行った場合は、その時点で受験を取りやめさせ退室させます。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

II 解答上の注意

- 1 解答は、解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。
- 2 問題の文中の **ア**，**イウ** などには、特に指示がないかぎり、符号(－)，数字(0～9)，又は文字(a～d)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 **アイウ** に $-8a$ と答えたいとき

ア	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
イ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	<input checked="" type="radio"/>	9	a	b	c	d
ウ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<input checked="" type="radio"/>	b	c	d

なお、同一の問題文中に **ア**，**イウ** などが2度以上現れる場合、2度目以降は、**ア**，**イウ** のように細字で表記します。

- 3 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として答えなさい。

また、それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば、 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{2a+1}{3}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ ， $\frac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

- 4 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $4\sqrt{2}$ ， $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ， $6\sqrt{2a}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ ， $\frac{\sqrt{52}}{4}$ ， $3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

[1] O を原点とする座標平面において、点 $P(p, q)$ を中心とする円 C が、方程式 $y = \frac{4}{3}x$ で表される直線 l に接しているとする。

(1) 円 C の半径 r を求めよう。

点 P を通り直線 l に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x - p) + q$$

なので、 P から l に引いた垂線と l の交点 Q の座標は

$$\left(\frac{3}{25}(\boxed{\text{ウ}}p + \boxed{\text{エ}}q), \frac{4}{25}(\boxed{\text{ウ}}p + \boxed{\text{エ}}q)\right)$$

となる。

求める C の半径 r は、 P と l の距離 PQ に等しいので

$$r = \frac{1}{5} \left| \boxed{\text{オ}}p - \boxed{\text{カ}}q \right| \dots\dots\dots \text{①}$$

である。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

- (2) 円 C が、 x 軸に接し、点 $R(2, 2)$ を通る場合を考える。このとき、 $p > 0$ 、 $q > 0$ である。 C の方程式を求めよう。

C は x 軸に接するので、 C の半径 r は q に等しい。したがって、①により、 $p = \boxed{\text{キ}} q$ である。

C は点 R を通るので、求める C の方程式は

$$(x - \boxed{\text{ク}})^2 + (y - \boxed{\text{ケ}})^2 = \boxed{\text{コ}} \dots\dots\dots ②$$

または

$$(x - \boxed{\text{サ}})^2 + (y - \boxed{\text{シ}})^2 = \boxed{\text{ス}} \dots\dots\dots ③$$

であることがわかる。ただし、 $\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

- (3) 方程式②の表す円の中心を S 、方程式③の表す円の中心を T とおくと、直線 ST は原点 O を通り、点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。 $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | | | | |
|---|-----------|---|-----------|---|-----------|
| ① | 1 : 1 に内分 | ② | 1 : 2 に内分 | ③ | 2 : 1 に内分 |
| ④ | 1 : 1 に外分 | ⑤ | 1 : 2 に外分 | ⑥ | 2 : 1 に外分 |

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

〔2〕 自然数 m, n に対して, 不等式

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3 \quad \dots\dots\dots ④$$

を考える。

$m = 2, n = 1$ のとき, $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{ソ}}$ であり, この m, n の値の組は ④ を満たす。

$m = 4, n = 3$ のとき, $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{タ}}$ であり, この m, n の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 m, n の組の個数を調べよう。④ は

$$\log_2 m + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \log_3 n \leq \boxed{\text{テ}} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

と変形できる。

n が自然数のとき, $\log_3 n$ のとり得る最小の値は $\boxed{\text{ト}}$ であるから, ⑤ により, $\log_2 m \leq \boxed{\text{テ}}$ でなければならない。 $\log_2 m \leq \boxed{\text{テ}}$ により, $m = \boxed{\text{ナ}}$ または $m = \boxed{\text{ニ}}$ でなければならない。ただし, $\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合、⑤は、 $\log_3 n \leq \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ となり、 $n^2 \leq \boxed{\text{ノハ}}$ と

変形できる。よって、 $m = \boxed{\text{ナ}}$ のとき、⑤を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は $n \leq \boxed{\text{ヒ}}$ である。したがって、 $m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合、④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

同様にして、 $m = \boxed{\text{ニ}}$ の場合、④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{フ}}$ である。

以上のことから、④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

p を実数とし、 $f(x) = x^3 - px$ とする。

- (1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう。 $f(x)$ の導関数は、

$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^{\boxed{\text{イ}}} - p$ である。したがって、 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるな

らば、 $\boxed{\text{ア}} a^{\boxed{\text{イ}}} - p = \boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。さらに、 $x = a$ の前後での

$f'(x)$ の符号の変化を考えることにより、 p が条件 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす場合は、

$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。 $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを、次の

①～④のうちから一つ選べ。

- ① $p = 0$ ② $p > 0$ ③ $p \geq 0$ ④ $p < 0$ ⑤ $p \leq 0$

- (2) 関数 $f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとるとする。また、曲線 $y = f(x)$ を C とし、

C 上の点 $\left(\frac{p}{3}, f\left(\frac{p}{3}\right)\right)$ を A とする。

$f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとることから、 $p = \boxed{\text{オ}}$ であり、 $f(x)$ は

$x = \boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり、 $x = \boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学 II

曲線 C の接線で、点 A を通り傾きが 0 でないものを l とする。 l の方程式を求めよう。 l と C の接点の x 座標を b とすると、 l は点 $(b, f(b))$ における C の接線であるから、 l の方程式は b を用いて

$$y = \left(\boxed{\text{ケ}} b^2 - \boxed{\text{コ}} \right) (x - b) + f(b)$$

と表すことができる。また、 l は点 A を通るから、方程式

$$\boxed{\text{サ}} b^3 - \boxed{\text{シ}} b^2 + 1 = 0$$

を得る。この方程式を解くと、 $b = \boxed{\text{ス}}$ 、 $\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるが、 l の傾きが

0 でないことから、 l の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}} x + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

点 A を頂点とし、原点を通る放物線を D とする。 l と D で囲まれた図形のうち、不等式 $x \geq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。 D の方程式は

$$y = \boxed{\text{ニ}} x^2 - \boxed{\text{ヌ}} x$$

であるから、定積分を計算することにより、 $S = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

関数 $y = \sin x - \cos 2x$ のグラフについて考えよう。ただし、 $0 \leq x \leq 2\pi$ とする。

- (1) まず、 $y = \sin x - \cos 2x > 0$ となる x の範囲を求めよう。

三角関数の2倍角の公式を利用すれば

$$\begin{aligned} \sin x - \cos 2x &= \boxed{\text{ア}} \sin^2 x + \sin x - \boxed{\text{イ}} \dots\dots\dots \text{①} \\ &= \left(\boxed{\text{ア}} \sin x - \boxed{\text{ウ}} \right) \left(\sin x + \boxed{\text{エ}} \right) \end{aligned}$$

である。よって、 $0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $\sin x - \cos 2x = 0$ となる x の値は、

小さい順に、 $\frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ 、 $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ 、 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ であることがわかる。また、

$y = \sin x - \cos 2x > 0$ となる x の範囲は、 $\boxed{\text{コ}}$ である。 $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- | | | | |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|
| ① | $0 < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ | ④ | $\frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}} < x < \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ |
| ② | $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi < x < \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ | ⑤ | $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi < x < 2\pi$ |

- (2) 次に、 $y = \sin x - \cos 2x$ の最大値と最小値を求めよう。

① から

$$\sin x - \cos 2x = \boxed{\text{ア}} \left(\sin x + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)^2 - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \dots \text{②}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

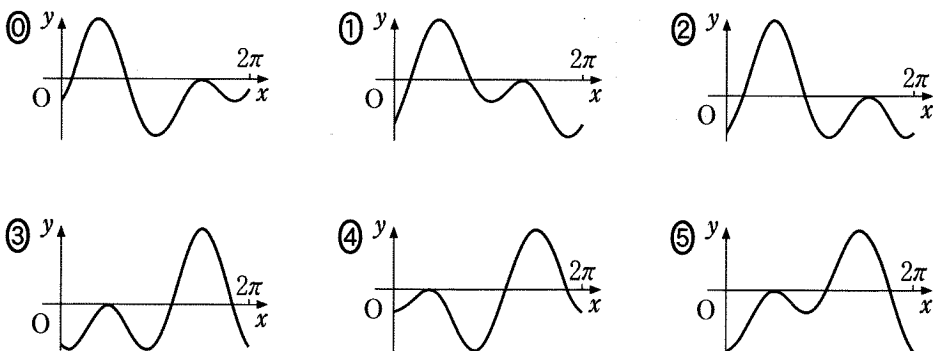
数学Ⅱ

よって、②から、 $y = \sin x - \cos 2x$ は、 $x = \boxed{\text{ソ}}$ において最大値
 $\boxed{\text{タ}}$ をとり、 $x = \boxed{\text{チ}}$ 、 $\boxed{\text{ツ}}$ において最小値 $\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとること
 がわかる。ただし、 $\boxed{\text{ソ}}$ 、 $\boxed{\text{チ}}$ 、 $\boxed{\text{ツ}}$ については、当てはまる
 ものを、次の①～⑨のうちから一つずつ選べ。 $\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ は解答の順
 序を問わない。

- ① α ② $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ⑤ $\pi - \alpha$
 ⑥ $\pi + \alpha$ ⑦ $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ ⑧ $\frac{3}{2}\pi$ ⑨ $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ ⑩ $2\pi - \alpha$

ここで、 α は、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $\sin \alpha = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ を満たすものとする。

(3) 以上のことから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における関数 $y = \sin x - \cos 2x$ のグラフの
 概形として適切なものは $\boxed{\text{ニ}}$ であることがわかる。 $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまる
 ものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。



数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

c, d を実数とし、 x についての3次式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + cx^2 + dx + 2$$

で定める。 $P(x)$ は、 $P(-1) = 0$ 、 $P(2) < -2$ を満たし、3以上の自然数 n に対しては $P(n) \geq 0$ であるとする。

$P(-1) = 0$ により

$$d = c + \boxed{\text{ア}}$$

となり、 $P(x)$ は c を用いて

$$P(x) = (x+1) \left\{ x^2 + \left(\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}} \right) x + \boxed{\text{エ}} \right\} \quad \dots \text{①}$$

と因数分解される。①を用いて、 $P(2) < -2$ を c について解くと

$$c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \dots \text{②}$$

となる。

また、 n を3以上の自然数とするとき、不等式 $P(n) \geq 0$ を c について解くと

$$c \geq -\frac{\boxed{\text{キ}}}{n} + \boxed{\text{ク}} - n \quad \dots \text{③}$$

となる。 $n \geq 3$ のとき、 n の値が大きくなると、③の右辺の値は小さくなる。したがって、②と③により、 c のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \leq c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \dots \text{④}$$

となる。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

3次関数 $y = P(x)$ のグラフを考えると、 $P(0) = 2 > 0$ かつ $P(2) < 0$ であるから、方程式 $P(x) = 0$ は 0 と 2 の間に実数解 α をもつ。 α のとり得る値の範囲を求めよう。

①により、この α は、2次方程式

$$x^2 + (\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}})x + \boxed{\text{エ}} = 0$$

の解である。この方程式の他の解を β とすると、解と係数の関係により、 $\alpha + \beta$ は c を用いて

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}}$$

と表される。したがって、④により

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < \alpha + \beta \leq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \dots\dots\dots \text{⑤}$$

が得られる。解と係数の関係により、 $\alpha\beta = \boxed{\text{テ}}$ であり、また、 $\alpha > 0$ であるから、⑤は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \alpha < \alpha^2 + \boxed{\text{テ}} \leq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \alpha$$

と変形できる。この不等式を α について解いて、 $0 < \alpha < 2$ に注意すると、 α のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leq \alpha < \frac{\boxed{\text{ニ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

であることがわかる。

数学Ⅱ

(下書き用紙)