2015 年度大学入試センター試験 解説〈数学ＩＡ〉

第１問

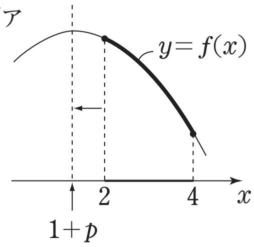
$$y=-x^2+2x+2$$
$$=-(x-1)^2+3 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，このグラフの頂点の座標は，$(1,\ 3)$　　……ア，イ

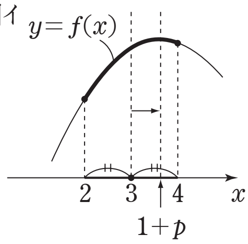
①のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの頂点の座標は $(1+p,\ 3+q)$ であるから，

$$f(x)=-\{x-(1+p)\}^2+3+q \quad \cdots\cdots ②$$

図ア



図イ



(1)　$2 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値が $f(2)$ になるのは，右の図アのように，

(頂点の x 座標) $\leqq 2$

のときである。よって，

$1+p \leqq 2$

$p \leqq 1$　　……エ

$\uparrow$

$(\cdots ③)$　　……ウ

$2 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最小値が $f(2)$ になるのは，図イのように，

(頂点の x 座標) $\geqq 3$

のときである。よって，

$1+p \geqq 3$

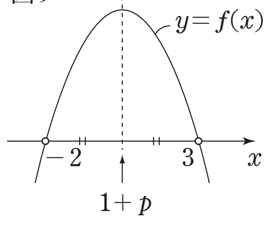
$p \geqq 2$　　……カ

$\uparrow$

$(\cdots ②)$　　……オ

(2)　$f(x)>0$ の解が $-2<x<3$ になるのは，$y=f(x)$ のグラフが図ウのようになるときである。

図ウ



その条件は，

$$1+p=\frac{-2+3}{2} \quad \cdots\cdots ③ \quad かつ \quad f(3)=0 \quad \cdots\cdots ④$$

である。

③より，$p=\dfrac{-1}{2}$　　……キク，ケ

これと②，④より，$-\left\{3-\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2+3+q=0$

よって，$q=\dfrac{13}{4}$　　……コサ，シ

第２問

〔１〕

(1) 「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(q_1$ かつ $q_2)$」の対偶は,

「$\overline{(q_1 \text{ かつ } q_2)}$ $\Longrightarrow$ $\overline{(p_1 \text{ かつ } p_2)}$」 ……①

ド・モルガンの法則より,

$\overline{(q_1 \text{ かつ } q_2)} = (\ \overline{q_1}$ または $\overline{q_2}\ )$, $\overline{(p_1 \text{ かつ } p_2)} = (\ \overline{p_1}$ または $\overline{p_2}\ )$

であるから, ①は,

「$(\ \overline{q_1}$ または $\overline{q_2}\ )$ $\Longrightarrow$ $(\ \overline{p_1}$ または $\overline{p_2}\ )$」

よって, ① ……**ア**

(2) 条件 p_1, p_2, q_1, q_2 を満たす 30 以下の自然数 n の集合をそれぞれ $A(p_1)$, $A(p_2)$, $A(q_1)$, $A(q_2)$ のように表すと,

$A(p_1) = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29\}$

$A(p_2) = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 15,\ 17,\ 21,\ 27,\ 29\}$

$A(q_1) = \{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\ 29\}$

$A(q_2) = \{5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29\}$

このとき,

$A((p_1$ かつ $p_2)) = \{3,\ 5,\ 11,\ 17,\ 29\}$……②

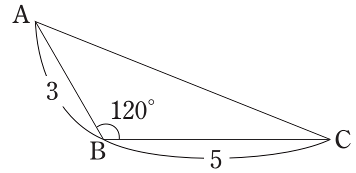
$A((\ \overline{q_1}$ かつ $q_2)) = \{5,\ 11,\ 17,\ 23\}$……③

よって,「② $\Longrightarrow$ ③」を満たさない n の値は, 3 と 29 ……**イ**, **ウエ**

（注） $A(p_2)$ に “29” を入れ忘れない $(n+2=31>30$ となる$)$ ように注意が必要である。

〔2〕

図ア



右図アにおいて，余弦定理より，

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle ABC \\ &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 \end{aligned}$$

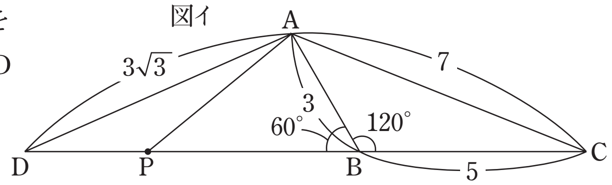
よって，$AC = 7$ ……オ

また，$\sin\angle ABC = \sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……カ，キ

さらに，正弦定理より，$\dfrac{AB}{\sin\angle BCA} = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$

よって，$\sin\angle BCA = \dfrac{AB}{AC}\sin\angle ABC = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$ ……ク，ケ，コサ

図イ



次に，題意を満たすように点Dをとると，図イのようになる。PはBD上の点である。

ここで，

$\angle ABD = 60^\circ$，$AB : AD = 1 : \sqrt{3}$

より，$\angle ADB = 30^\circ$ である。

$\triangle APC$ で正弦定理より，$2R = \dfrac{AC}{\sin\angle APC} = \dfrac{7}{\sin\angle APC}$

これより，$R = \dfrac{7}{2\sin\angle APC}$ ……①

ここで，図イより，$30^\circ \leqq \angle APC \leqq 120^\circ$ であるから，$\dfrac{1}{2} \leqq \sin\angle APC \leqq 1$

よって，①より，$\dfrac{7}{2\cdot 1} \leqq R \leqq \dfrac{7}{2\cdot\frac{1}{2}}$

すなわち，$\dfrac{7}{2} \leqq R \leqq 7$ ……シ，ス，セ

第３問

〔1〕

与えられたヒストグラムから累積度数表を作ると，右のようになる。

階級	度数	累積度数
5 ～ 10	1	1
10 ～ 15	4	5
15 ～ 20	6	11
20 ～ 25	11	22
25 ～ 30	9	31
30 ～ 35	4	35
35 ～ 40	3	38
40 ～ 45	1	39
45 ～ 50	1	40

(1)　第3四分位数は，データの小さい方から30番目のデータと31番目のデータの平均であるから，右表より答えは，

④の「25m以上30m未満」　……ア

(2)　第1四分位数は，データの小さい方から10番目のデータと11番目のデータ平均であるから，それは「15m以上20m未満」の階級に含まれる。

また，中央値はデータの小さい方から20番目のデータと21番目のデータの平均であるから，それは「20m以上25m未満」の階級に含まれる。

以上と(1)を満たす箱ひげ図は，①と④であるから，答えはそれ以外の，

⓪，②，③，⑤　……イ，ウ，エ，オ

(3)　Aの「どの生徒の記録も下がった」とき，第1四分位数が含まれる階級は上と同じか小さい階級になるから，aの図とは矛盾する。

Cの「最初に取ったデータで上位$\frac{1}{3}$に入るすべての生徒の記録が伸びた」とき，「45m以上」に含まれるデータの個数は1以上になるから，cの図とは矛盾する。

よって答えは，⓪，②　……カ，キ

〔2〕

$$(\text{相関係数})=\frac{(1\text{回目と}2\text{回目のデータの共分散})}{(1\text{回目の標準偏差})\times(2\text{回目の標準偏差})}$$
であるから，その値は，

$$\frac{54.30}{8.21\times6.98}=\frac{54.30}{57.3058}\quad\frac{54.30}{57.31}=0.947\cdots$$ より，答えは，⑦　……ク

第４問

A	B	C	D	E

右図のように，正方形の板に記号をつける。

(1)　A に塗る色は 3 通り，B ～ E に塗る色は，それぞれの左隣りに塗った色以外の 2 通りずつあるから，塗り方は全部で，

$3\times 2^4=\underline{\underline{48}}$ (通り)　……**アイ**

(2)　A，B，C に色を塗れば，左右対称となる塗り方は 1 つに決まる。

たとえば，A，B，C を「赤，緑，赤」と塗れば，全体は「赤，緑，赤，緑，赤」と決まる。

よって，A，B，C の塗り方の数が答えで，$3\times 2^2=\underline{\underline{12}}$ (通り)　……**ウエ**

(3)　緑と青を交互に塗ることになるから，A をどちらの色で塗るかを考えれば，答えは $\underline{\underline{2}}$ 通り。　……**オ**

(4)　赤で塗る 3 枚の正方形は, A と C と E に決まるから, B と D の塗り方を考えればよい。

B と D には緑と青のどちらを塗ってもよいから，答えは，$2^2=\underline{\underline{4}}$ (通り)　……**カ**

(5)　赤で塗る 1 枚の正方形が A である場合，B ～ E には緑と青を交互に塗ることになるから，塗り方は 2 通り。赤で塗る 1 枚の正方形が E である場合も同様であるから，答えは，$2\times 2=\underline{\underline{4}}$ (通り)　……**キ**

赤で塗る 1 枚の正方形が B である場合，A には緑か青を，C ～ E には緑と青を交互に塗ることになるから，塗り方は，$2\times 2=4$ (通り)。赤で塗る 1 枚の正方形が D である場合も同様に 4 通り。

赤で塗る 1 枚の正方形が C である場合，A と B，C と D のそれぞれに青と緑を交互に塗ることになるから，塗り方は，$2\times 2=4$ (通り)。

よって，端以外の 1 枚を赤に塗る塗り方は，$4\times 2+4=\underline{\underline{12}}$ (通り)　……**クケ**

以上から，1 枚の正方形を赤に塗る塗り方の合計は，$4+12=\underline{\underline{16}}$ (通り)　……**コサ**

(6)　赤で塗る正方形の枚数は，

①；0 枚，②；1 枚，③；2 枚，④；3 枚

のいずれかである。

①，②，④の塗り方はそれぞれ 2 通り，16 通り，4 通りであり，塗り方は全部で 48 通りあるから，③の塗り方は，$48-(2+16+4)=\underline{\underline{26}}$ (通り)　……**シス**

第５問

(1)　　$a=756=2^{\underline{\underline{2}}}\times 3^{\underline{\underline{3}}}\times \underline{\underline{7}}$　　……ア，イ，ウ

であるから，756 の正の約数の個数は，

$(2+1)\times(3+1)\times(1+1)=\underline{\underline{24}}$（個）　　……エオ

(2)　$\sqrt{am}=\sqrt{2^2\times 3^3\times 7\times m}$ が自然数となるための条件は，根号内の数が平方数となることである。よって，k を自然数として，

$m=3\times 7\times k^2$　つまり，$m=21k^2$　……①

と表すことができる。

このような最小の m は，$k=1$ として，$m=\underline{\underline{21}}$　　……カキ

さらに，$\sqrt{am}=\sqrt{2^2\times 3^4\times 7^2\times k^2}=2\times 3^2\times 7\times k=\underline{\underline{126}}k$　　……クケコ

(3)　1 次不定方程式 $126k-11\ell=1$　……②を解く。

$126=11\cdot 11+5$ より，$5=126-11\cdot 11$　……③

$11=5\cdot 2+1$ より，$1=11-5\cdot 2$　……④

③を④に代入すると，

$1=11-(126-11\cdot 11)\cdot 2=11-126\cdot 2+11\cdot 22=-126\cdot 2+11\cdot 23$

よって，$-126\cdot 2+11\cdot 23=1$　……⑤

ここで，②－⑤をつくると，

$126(k+2)-11(\ell+23)=0$

$126(k+2)=11(\ell+23)$　……⑥

126 と 11 は互いに素であるから，⑥より，n を整数として，

$k+2=11n$，　$\ell+23=126n$

$k=11n-2$，　$\ell=126n-23$

と表せる。

$k>0$ となる最小の k の値は，$n=1$ として，$k=11\cdot 1-2=\underline{\underline{9}}$　　……サ

このとき，$\ell=126\cdot 1-23=\underline{\underline{103}}$　　……シスセ

(4)　$\sqrt{am}=126k$ を 11 で割ると 1 余るとき，ℓ を整数として，

$126k=11\ell+1$

$126k-11\ell=1$

と表せるから，これは (3) で扱った 1 次不定方程式と同じである。

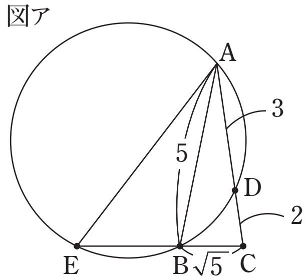
$|k|$ の最小値は，$n=1$ のときの 9 であるから，最小の自然数 m は，①において $k=9$ として，

$m=21\times 9^2=\underline{\underline{1701}}$　　……ソタチツ

第６問

題意を図示すると，右の図アのようになる。

図ア



方べきの定理より，

$$\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CB}=\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CD}=2\cdot 5=\underline{\underline{10}}$$ ……アイ

これより，

$$\mathrm{CE}\cdot\sqrt{5}=10 \qquad \mathrm{CE}=2\sqrt{5}$$

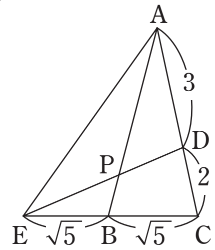
よって，$\mathrm{BE}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\underline{\underline{\sqrt{5}}}$ ……ウ

$\mathrm{BE}=\mathrm{BC}$ より，AB は △ACE の中線であり，△ACE の重心 G は，AB を 2：1 に内分するから，

$$\mathrm{AG}=\frac{2}{3}\mathrm{AB}=\underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$ ……エオ，カ

次に，図イにおいて，メネラウスの定理より，

図イ



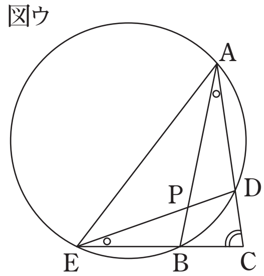
$$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{EP}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AD}}=1$$

これより，$\dfrac{\mathrm{DP}}{\mathrm{EP}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{5}{3}=1$

よって，$\dfrac{\mathrm{DP}}{\mathrm{EP}}=\underline{\underline{\dfrac{3}{5}}}$ ……キ，ク ……①

図ウに示した角の相等から，△ABC∽△EDC であるから，

図ウ



$$\mathrm{BA}:\mathrm{DE}=\mathrm{BC}:\mathrm{DC}$$

これより，$5:\mathrm{DE}=\sqrt{5}:2$

よって，$\mathrm{DE}=\underline{\underline{2\sqrt{5}}}$ ……ケ，コ ……②

①より，$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EP}}=\dfrac{3+5}{5}=\dfrac{8}{5}$ であるから，②より，

$$\mathrm{EP}=\frac{5}{8}\mathrm{DE}=\frac{5}{8}\times 2\sqrt{5}=\underline{\underline{\frac{5\sqrt{5}}{4}}}$$ ……サ，シ，ス