2015 年度大学入試センター試験 解説〈数学ⅡB〉

第 1 問

［1］(1)　2 点間の距離の公式から，

$$OP=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\sqrt{4\times1}=\underline{\underline{2}}$$ ……ア

$$PQ=\sqrt{\{(2\cos\theta+\cos7\theta)-2\cos\theta\}^2+\{(2\sin\theta+\sin7\theta)-2\sin\theta\}^2}$$

$$=\sqrt{\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta}=\underline{\underline{1}}$$ ……イ

である。また，

$$OQ^2=(2\cos\theta+\cos7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin7\theta)^2$$

$$=4\cos^2\theta+4\cos\theta\cos7\theta+\cos^2 7\theta$$
$$+4\sin^2\theta+4\sin\theta\sin7\theta+\sin^2 7\theta$$

$$=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta)$$
$$+4(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)$$

$$=\underline{\underline{5}}+\underline{\underline{4}}(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)$$ ……ウ，エ

$$=5+4\cos(7\theta-\theta)$$ （加法定理を用いて）

$$=5+4\cos\underline{\underline{6}}\theta \quad \cdots\cdots①$$ ……オ

ここで，

$$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots②$$

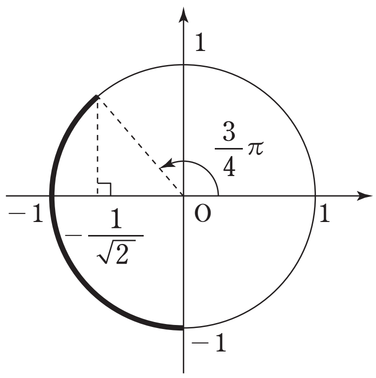
より，

$$\frac{3}{4}\pi\leqq6\theta\leqq\frac{3}{2}\pi \quad \cdots\cdots③$$

であるから，

$$\cos\pi\leqq\cos6\theta\leqq\cos\frac{3}{2}\pi$$

$$-1\leqq\cos6\theta\leqq0$$



ゆえに，①は $\cos6\theta=0$　つまり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大となる。

よって，②より，OQ は $\theta=\underline{\underline{\dfrac{\pi}{4}}}$ のとき， ……カ

最大値 $\sqrt{5+4\times0}=\sqrt{\underline{\underline{5}}}$ ……キ

をとる。

(2)　②において，$\cos\theta \neq 0$ であるから，$\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ より，

直線 OP を表す方程式は

$$y=\frac{2\sin\theta}{2\cos\theta}x=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$$

すなわち，

$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$　……④　(……$\underline{\underline{3}}$)　……ク

3 点 O，P，Q が一直線上にあるのは，Q が直線 OP 上の点のときであるから，

④より，

$(\sin\theta)(2\cos\theta+\cos 7\theta)-(\cos\theta)(2\sin\theta+\sin 7\theta)=0$

$\sin\theta\cos 7\theta-\cos\theta\sin 7\theta=0$

$\sin 7\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 7\theta=0$

$\sin(7\theta-\theta)=0$　より，$\sin 6\theta=0$

③より，これを満たす θ は

$6\theta=\pi$

つまり，

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

このことにより，②の範囲で，3 点 O，P，Q が一直線上にあるのは，

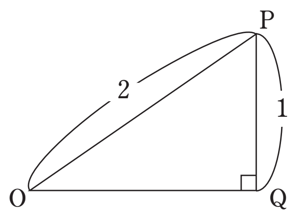
$\theta=\dfrac{\pi}{\underline{\underline{6}}}$ のときである。　……ケ

(3)　∠OQP が直角となるのは，△OPQ が

直角三角形であることおよび，(1) から，

OP＝2，PQ＝1

に着目すると，OQ＝$\sqrt{\underline{\underline{3}}}$ のとき，　……コ



このとき，①より，

$$(\sqrt{3})^2=5+4\cos 6\theta$$

$$\cos 6\theta=-\frac{1}{2}$$

③に注意すると，②の範囲でこれを満たす θ は，

$6\theta=\dfrac{4}{3}\pi$　つまり，$\theta=\dfrac{2}{9}\pi$

であるから，∠OQP＝90° となるのは

$\theta=\dfrac{2}{\underline{\underline{9}}}\pi$ のときである。　……サ，シ

［2］(1)　(＊)より

$x\sqrt{y^3}=a$　から，$(x\sqrt{y^3})^2=a^2$

よって，$x^2y^3=a^2$　……①

$\sqrt[3]{x}\,y=b$　から，$(\sqrt[3]{x}\,y)^3=b^3$

よって，$xy^3=b^3$　……②

①÷②より，

$\dfrac{x^2y^3}{xy^3}=\dfrac{a^2}{b^3}$　から，$x=a^{2}b^{-3}$　……③　　……ス，セソ

②より，

$y^3=\dfrac{1}{x}b^3=x^{-1}b^3$

であるから，これに③を用いて，

$y^3=(a^2b^{-3})^{-1}\times b^3=a^{-2}b^3\times b^3=a^{-2}b^6$

よって，

$y=(a^{-2}b^6)^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{2}{3}}b^2$　……④

これより，$p=\dfrac{-2}{3}$ とおくと，　……チツ，テ

$y=a^p b^{2}$　……タ

となる。

(2)　$b=2\sqrt[3]{a^4}$　つまり，$b=2a^{\frac{4}{3}}$　……⑤

とするとき，(＊)を満たす正の実数 x，y が③，④であるので，

③，⑤から，

$x=a^2\times(2a^{\frac{4}{3}})^{-3}=a^2\times2^{-3}\times a^{\frac{4}{3}\times(-3)}=a^2\times2^{-3}\times a^{-4}$

より，

$x=2^{-3}a^{-2}$　……⑥　　……トナ

④，⑤から，

$y=a^{-\frac{2}{3}}\times(2a^{\frac{4}{3}})^2=a^{-\frac{2}{3}}\times2^2\times a^{\frac{4}{3}\times2}=a^{-\frac{2}{3}}\times2^2\times a^{\frac{8}{3}}$

より，

$y=2^2a^{2}$　……⑦　　……ニ

と表される。

ここで，$x>0$，$y>0$ に対する

$$(\text{相加平均})=\frac{x+y}{2}\ ,\ (\text{相乗平均})=\sqrt{xy}$$

について，

$$\frac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}\quad (\text{等号は } x=y \quad \cdots\cdots⑧\text{で成立})$$

つまり，

$$x+y\geqq 2\sqrt{xy}$$

が成り立つことを利用すると，⑥，⑦を用いて，

$$x+y\geqq 2\sqrt{(2^{-3}a^{-2})\times(2^2a^2)}$$

$$=2\sqrt{2^{-1}}=2\times 2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

であり，⑧より，$x+y=\sqrt{2}$ は，

$2^{-3}a^{-2}=2^2a^2$

$(a^2)^2=2^{-3}\cdot 2^{-2}$

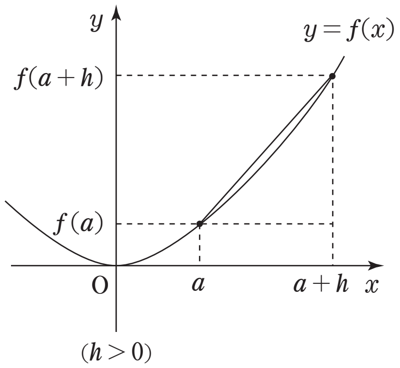
$a^4=2^{-5}$

となる a で成立する。

よって，$a>0$ であるから，$q=\dfrac{-5}{4}$ とおくと，　……ネノ，ハ

$a=2^q$ のとき，$x+y$ は最小値 $\sqrt{2}$ をとることがわかる。　……ヌ

第 2 問



(1)　関数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ においてh≠0のとき，xがaからa＋hまで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{\frac{1}{2}(a+h)^2-\frac{1}{2}a^2}{h}$$

$$=\frac{1}{2h}(2ah+h^2)=\underline{\underline{a}}+\underline{\underline{\frac{h}{2}}}$$ ……ア，イ

である。

したがって，$x=a$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ は,

$$f'(a)=\lim_{h\to \underline{\underline{0}}}\left(a+\frac{h}{2}\right)=\underline{\underline{a}} \quad \cdots\cdots①$$ ……ウ，エ

である。

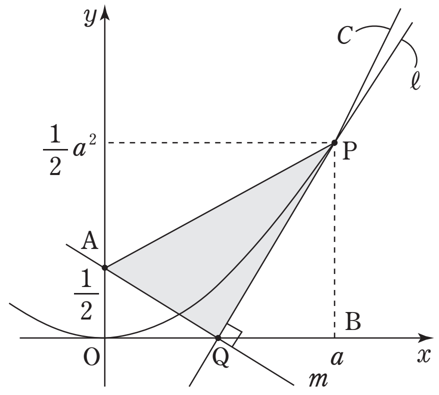
(2)　$C：y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ における接線 ℓ の傾きは,

$f'(a)=a$ であるから，接線 ℓ の方程式は

$$y=a(x-a)+\frac{1}{2}a^2 \quad より，\quad y=\underline{\underline{a}}x-\underline{\underline{\frac{1}{2}}}a^2 \quad \cdots\cdots②$$ ……オ，カ

②と x 軸 (つまり, $y=0$) との交点 Q の x 座標は，$ax-\frac{1}{2}a^2=0$ より，$x=\frac{a}{2}$

よって，$Q\left(\underline{\underline{\frac{a}{2}}},\ 0\right)$ である。 ……キ，ク



さらに，点 Q を通り，ℓ と垂直な直線 m について，①より,

(ℓ の傾き)×(m の傾き)＝－1

a×(m の傾き)＝－1

これより，m の傾きは $-\frac{1}{a}$

であるから，m の方程式は,

$$y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

つまり，$y=\underline{\underline{\frac{-1}{a}}}x+\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ ……ケ～ス

ここで，点 P から x 軸に垂直に下ろした点 $(a,\ 0)$ を点 B とする。m と y 軸の交点 A と点 B について,

△ APQ の面積 S は,

$S=$(四角形 OBPA)$-$△ AOQ $-$ △ BPQ　　……③

また,

$$(\text{四角形 OBPA})=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\right)\times a=\frac{a}{4}(a^2+1) \quad \cdots\cdots④$$

$$\triangle \mathrm{AOQ}=\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{a}{8}$$

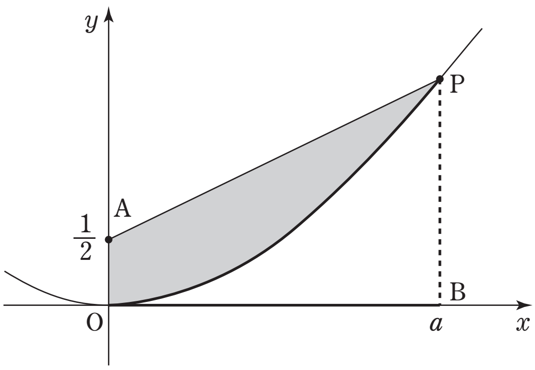
$$\triangle \mathrm{BPQ}=\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{a}{2}\right)\times\frac{1}{2}a^2=\frac{a^3}{8}$$

これらと③から,

$$S=\frac{a}{4}(a^2+1)-\frac{a}{8}-\frac{a^3}{8}=\frac{a}{4}(a^2+1)-\frac{a}{8}(a^2+1)$$

$$=\frac{a(a^2+1)}{8} \quad \cdots\cdots⑤$$

……セ，ソ



また，面積 T は上図の網目部分であり，x 軸と線分 BP および曲線 C によって囲まれた図形の面積を U とおくと,

$T=④-U$　　……⑥

これと,

$$U=\int_0^a \frac{1}{2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

より,

$$T=\frac{a}{4}(a^2+1)-\frac{a^3}{6}=\frac{a(a^2+3)}{12} \quad \cdots\cdots⑦$$

……タ，チツ

となる。

$$S-T=\frac{a(a^2+1)}{8}-\frac{a(a^2+3)}{12}$$

$$=a\times\frac{3(a^2+1)-2(a^2+3)}{24}$$

$$=\frac{a(a^2-3)}{24}$$

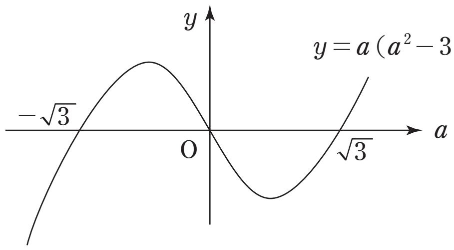
……テ，トナ

であるから，$S-T>0$ となる a のとり得る値の範囲は

$a(a^2-3)>0$　と　$a>0$ より，

$a^2>3$

よって，$a>\underline{\underline{\sqrt{3}}}$　……ニ



また，$a>0$ のとき，$S-T$ の値を $g(a)$ とおくと，

$$g(a)=\frac{a^3-3a}{24}$$

$$g'(a)=\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}(a^2-1)$$

であるから，$a>0$ における $g(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$		$-$		$+$
$g(a)$	0	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$

ゆえに，$g(a)$ は $a=1$ で，

極小値 $g(1)=\dfrac{1^3-3\times1}{24}=-\dfrac{1}{12}$ をとる。

よって，$S-T$ は $a>0$ で $a=\underline{\underline{1}}$ のとき最小値 $\underline{\underline{\dfrac{-1}{12}}}$ をとる。　……ヌ～ヒ

第 3 問

(1)　2^n の値は $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ に対して，順に

$2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32$

となることから，a_n の値は，

$a_1=2,\ a_2=\underline{\underline{4}},\ a_3=\underline{\underline{8}},\ a_4=\underline{\underline{6}},\ a_5=\underline{\underline{2}}$ ……ア〜エ

ここで，

$2^{n+1}=2\cdot 2^n$

であるから，2^{n+1} の一の位の数は 2^n の一の位の数を 2 倍した数の一の位の数として定まる。

よって，2^n の一の位の数は

2，4，8，6，2，4，8，6，2，……

となり，2，4，8，6 の順にくり返すから

$a_{n+4}=a_n$

↑

(……$\underline{\underline{③}}$) ……オ

が成り立つ。

(2)　①をくり返し用いることで，

$$\begin{aligned}b_{n+4}&=\frac{a_{n+3}\,b_{n+3}}{4}\\&=\frac{a_{n+3}}{4}\times\left(\frac{a_{n+2}\,b_{n+2}}{4}\right)=\frac{a_{n+3}\,a_{n+2}}{4^2}\,b_{n+2}\\&=\frac{a_{n+3}\,a_{n+2}}{4^2}\times\left(\frac{a_{n+1}\,b_{n+1}}{4}\right)=\frac{a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}}{4^3}\,b_{n+1}\\&=\frac{a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}}{4^3}\times\left(\frac{a_n\,b_n}{4}\right)=\frac{a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}\,a_n}{4^4}\,b_n\end{aligned}$$

よって，すべての自然数 n に対して，

$$b_{n+4}=\frac{a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}\,a_n}{2^{\underline{\underline{8}}}}\,b_n \quad \cdots\cdots②$$ ……カ

が成り立つことがわかる。

ここで，(1) から，$a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3}$ は 2，4，8，6 が循環した数列の連続した 4 数より，

$$\begin{aligned}a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}\,a_n&=2\times4\times8\times6=2^1\times2^2\times2^3\times(2^1\times3)\\&=2^{1+2+3+1}\times3=3\cdot2^{\underline{\underline{7}}}\end{aligned}$$ ……キ

であり，これを②に用いると，

$$b_{n+4}=\frac{3\times2^7}{2^8}\,b_n \quad つまり，b_{n+4}=\frac{3}{\underline{\underline{2}}}\,b_n \quad \cdots\cdots③$$ ……ク，ケ

が成り立つ。

③を用いると，

$$b_{4k-3}=\frac{3}{2}b_{(4k-3)-4}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^2 b_{4(k-2)-3}=\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_{4\{k-(k-1)\}-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$ ……コ，サ

$$b_{4k-2}=\frac{3}{2}b_{(4k-2)-4}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2 b_{4(k-2)-2}=\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_{4\{k-(k-1)\}-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_2$$

これと，$b_2=\dfrac{a_1b_1}{4}=\dfrac{2\times1}{4}=\dfrac{1}{2}$ より，

$$b_{4k-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$ ……シ，ス

$$b_{4k-1}=\frac{3}{2}b_{(4k-1)-4}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^2 b_{4(k-2)-1}=\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_{4\{k-(k-1)\}-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_3$$

これと $b_3=\dfrac{a_2b_2}{4}=\dfrac{4\times\dfrac{1}{2}}{4}=\dfrac{1}{2}$ より，

$$b_{4k-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$ ……セ，ソ

$$b_{4k}=\frac{3}{2}b_{4k-4}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)}=\left(\frac{3}{2}\right)^2 b_{4(k-2)}=\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_{4\{k-(k-1)\}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_4$$

これと $b_4=\dfrac{a_3b_3}{4}=\dfrac{8\times\dfrac{1}{2}}{4}=1$ より，

$$b_{4k}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

とわかる。

(3)　$S_n=\sum_{j=1}^{n}b_j$ より，自然数 m に対して，

$$S_{4m}=(b_1+b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)$$
$$+\cdots\cdots+(b_{4m-3}+b_{4m-2}+b_{4m-1}+b_{4m})\quad\cdots\cdots④$$

ここで，(2) より，

$$b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=3\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

であり，④はこの式で $k=1$，2，…，m としたものの総和であるから，

$$S_{4m}=\sum_{k=1}^{m}3\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=3\times\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-1}{\frac{3}{2}-1}=6\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-1\right\}$$

よって，

$$S_{4m}=\underline{\underline{6}}\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-\underline{\underline{6}}\qquad\cdots\cdots タ，チ$$

である。

(4)　(2) から，

$$b_{4k-3}\,b_{4k-2}\,b_{4k-1}\,b_{4k}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$
$$=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{\underline{4}}(k-1)}\quad\cdots\cdots⑤\qquad\cdots\cdots ツ，テ$$

であることと，(3) と同様にして，

$T_{4m}=(b_1b_2b_3b_4)\times(b_5b_6b_7b_8)\times\cdots\cdots\times(b_{4m-3}\,b_{4m-2}\,b_{4m-1}\,b_{4m})$

が⑤の式で $k=1$，2，……，m としたもののすべての積であることから，

$$T_{4m}=\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(1-1)}\right\}\times\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(2-1)}\right\}\times\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(3-1)}\right\}$$
$$\times\cdots\cdots\times\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{4\{0+1+2+\cdots\cdots+(m-1)\}}\quad\cdots\cdots⑥$$

ここで，

$$0+1+2+\cdots\cdots+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$$

より，⑥から，

$$T_{4m}=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{4\times\frac{m(m-1)}{2}}=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{\underline{2}}m^2-\underline{\underline{2}}m}\qquad\cdots\cdots ト，ナ$$

である。

ここで，

$T_{10} = T_8\, b_9\, b_{10}$　……⑦

に注意すると，

$$T_8 = T_{4\times 2} = \frac{1}{4^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2\cdot 2^2 - 2\cdot 2} = \frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^8}$$

また，(2) より，

$$b_9 = b_{4\times 3-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3-1} = \frac{3^2}{2^2}$$

$$b_{10} = b_{4\times 3-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3-1} = \frac{3^2}{2^3}$$

であるから，⑦より

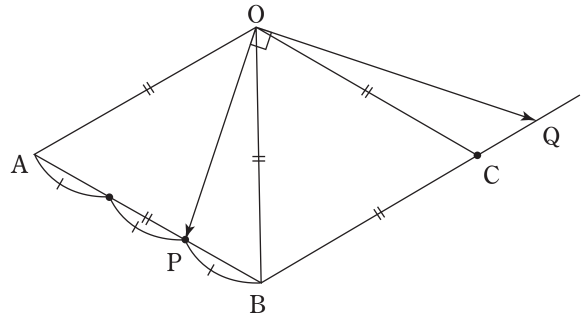
$$T_{10} = \frac{3^4}{2^8}\times\frac{3^2}{2^2}\times\frac{3^2}{2^3} = \frac{3^8}{2^{13}}$$　……ニ，ヌ，ネ

である。

（注）　本問の【オ】の解説では③を正解としていますが，大学入試センターより実施 2 日後に (1) を独立した問題と考えると ⓪も当てはまることから，⓪も正解とすると解答訂正の発表がありました。

第 4 問

(1)



P は線分 AB を AP：PB＝2：1 に内分する点より，

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}\vec{a}+\underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}\vec{b}$　……①　　……ア，イ，ウ

また，t を実数とすると，

$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$=\overrightarrow{OB}+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}$

であり，$\overrightarrow{BC}=-\vec{a}$ と合わせて，

$\overrightarrow{OQ}=\vec{b}+t\times(-\vec{a})=\underline{\underline{-}}t\vec{a}+\vec{b}$　……②　　……エ

ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60°であり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$　……③

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$

$=1\times1\times\dfrac{1}{2}$

$=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$　……④　　……オ, カ

また，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$ により，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\underline{\underline{0}}$　　……キ

であることから，①，②より，

$\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-t\vec{a}+\vec{b}\right)=0$

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(-t\vec{a}+\vec{b})=0$

$-t|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2=0$

③，④を用いて，

$$-t\times1^2-2t\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\times1^2=0$$

よって，

$$2t=\frac{5}{2}\ \text{より，}\ t=\underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$ ……ク，ケ

これらのことから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{9}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$$

$$=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$$

$$=\frac{1}{9}\left(1^2+4\times\frac{1}{2}+4\times1^2\right)=\frac{7}{9}$$

よって，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{3}}}$$ ……コ，サ

また，$t=\frac{5}{4}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}$ ……⑤であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{16}(5\vec{a}-4\vec{b})\cdot(5\vec{a}-4\vec{b})$$

$$=\frac{1}{16}(25|\vec{a}|^2-40\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2)$$

$$=\frac{1}{16}\left(25\times1^2-40\times\frac{1}{2}+16\times1^2\right)=\frac{21}{16}$$

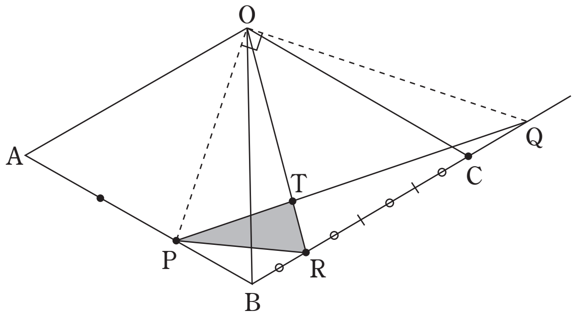
よって，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\underline{\underline{\frac{\sqrt{21}}{4}}}$$ ……シス，セ

であるから，△ OPQ の面積 S_1 は，∠ POQ＝90°に注意すると，

$$S_1=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{4}=\underline{\underline{\frac{7\sqrt{3}}{24}}}$$ ……ソ～ツ

(2)



点 R は BC を 1：3 に内分する点なので,

$$\overrightarrow{OR}=\frac{3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{1+3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$$

ここで,

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC}=-\vec{a}$$

より,

$$\overrightarrow{OC}=\vec{b}+(-\vec{a})=\vec{b}-\vec{a}$$

であるから,

$$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b} \quad \cdots\cdots⑥$$

である。

ここで，直線 OR と直線 PQ の交点 T は OR 上の点であるから，⑥より,

$$\overrightarrow{OT}=r\overrightarrow{OR} \quad (r \text{ は実数})$$

$$=r\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right) \quad \cdots\cdots⑦$$

$$=-\frac{r}{4}\vec{a}+r\vec{b}$$

一方，T が直線 PQ 上の点より,

$$\overrightarrow{OT}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\,\overrightarrow{OQ}$$

と表されることから，①，⑤より,

$$\overrightarrow{OT}=(1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+s\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{19}{12}s\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}s\right)\vec{b} \quad \cdots\cdots⑧$$

ここで，$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であることから，⑦，⑧において，それぞれの $\vec{a}$，$\vec{b}$ の係数は一致するから，

$$\begin{cases} -\dfrac{r}{4} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{19}{12}s \\ r = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}s \end{cases}$$

これを解いて，

$r = \underline{\underline{\dfrac{7}{9}}}$，$s = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$ ……テ～ニ

r の値と⑦より，

$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \underline{\underline{\dfrac{-7}{36}}}\vec{a} + \underline{\underline{\dfrac{7}{9}}}\vec{b}$ ……ヌ～フ

と求まる。

r，s の値により，

$\mathrm{OR} : \mathrm{OT} = 1 : r = 1 : \dfrac{7}{9} = 9 : 7$

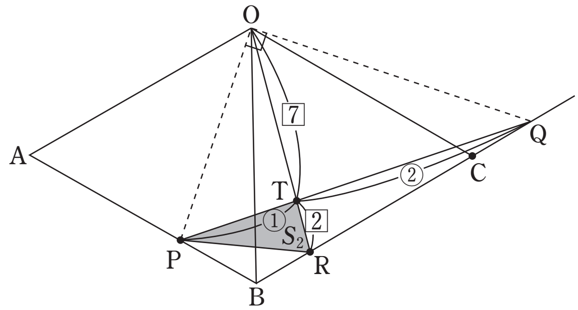
つまり，

$\mathrm{OT} : \mathrm{TR} = 7 : 2$

また，

$\mathrm{PT} : \mathrm{TQ} = s : (1-s) = \dfrac{1}{3} : \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = 1 : 2$

これらを用いると，



$\triangle\mathrm{OPT} = \dfrac{1}{3}S_1$

また，

$\triangle\mathrm{OPT} : S_2 = 7 : 2$

より，

$\triangle\mathrm{OPT} = \dfrac{7}{2}S_2$

よって，

$\dfrac{1}{3}S_1 = \dfrac{7}{2}S_2$，つまり $S_1 = \dfrac{21}{2}S_2$

これより，

$S_1 : S_2 = \dfrac{21}{2} : 1 = \underline{\underline{21}} : 2$ ……ヘホ

である。