試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

V

数　学　②　　　数　学Ⅱ

（100点
60分）

工業数理基礎，簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は，大学入試センター試験の出願時に，それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

I　注　意　事　項

1　解答用紙に，正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがあります。特に，解答用紙の**解答科目欄にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，0点となることがあります。**

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

〔新教育課程履修者〕

出題科目	ページ	選択方法
数学Ⅱ	4～14	左の2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅱ・数学B	15～30	

〔旧教育課程履修者〕

出題科目	ページ	選択方法
数学Ⅱ	4～14	左の3科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅱ・数学B	15～30	
旧数学Ⅱ・旧数学B	31～49	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

4　**選択問題については，いずれか2問を選択**し，その問題番号の解答欄に解答しなさい。

5　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

この注意事項は，問題冊子の裏表紙にも続きます。問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

6　**不正行為について**

①　不正行為に対しては厳正に対処します。

②　不正行為に見えるような行為が見受けられた場合は，監督者がカードを用いて注意します。

③　不正行為を行った場合は，その時点で受験を取りやめさせ退室させます。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\textbf{ア}}$，$\boxed{\textbf{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－)，数字(0～9)，又は文字(a～d)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\textbf{アイウ}}$ に $-8a$ と答えたいとき

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
イ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	●	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
ウ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●	ⓑ	ⓒ	ⓓ

なお，同一の問題文中に $\boxed{\textbf{ア}}$，$\boxed{\textbf{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\textbf{エオ}}}{\boxed{\textbf{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第１問　(配点　30)

〔1〕 O を原点とする座標平面上の 2 点 P$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, Q$(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$を考える。ただし，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする。

(1) OP $= \boxed{\text{ア}}$, PQ $= \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$\mathrm{OQ}^2 = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\,(\cos 7\theta\cos\theta + \sin 7\theta\sin\theta)$$

$$= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\cos\left(\boxed{\text{オ}}\,\theta\right)$$

である。

よって，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，OQ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

(2)　3点O，P，Qが一直線上にあるようなθの値を求めよう。

直線OPを表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=0$　　①　$(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=0$

②　$(\cos\theta)x-(\sin\theta)y=0$　　③　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

このことにより，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，3点O，P，Qが一直線上にあるのは $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3)　∠OQPが直角となるのは $\mathrm{OQ}=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，∠OQPが直角となるのは $\theta=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のときである。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 a，b を正の実数とする。連立方程式

$$(*)\ \begin{cases} x\sqrt{y^3}=a \\ \sqrt[3]{x}\ y=b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x，y について考えよう。

(1) 連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x，y は

$$x=a^{\boxed{\text{ス}}}b^{\boxed{\text{セソ}}},\qquad y=a^{p}b^{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。ただし

$$p=\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2)　$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。a が $a > 0$ の範囲を動くとき，連立方程式(＊)を満たす正の実数 x，y について，$x + y$ の最小値を求めよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，(＊)を満たす正の実数 x，y は，a を用いて

$$x = 2^{\boxed{\text{セソ}}}a^{\boxed{\text{トナ}}},\quad y = 2^{\boxed{\text{タ}}}a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

と表される。したがって，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，$x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

(1) 関数$f(x)=\frac{1}{2}x^2$の$x=a$における微分係数$f'(a)$を求めよう。hが0でないとき，xがaから$a+h$まで変化するときの$f(x)$の平均変化率は$\boxed{ア}+\frac{h}{\boxed{イ}}$である。したがって，求める微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to\boxed{ウ}}\left(\boxed{ア}+\frac{h}{\boxed{イ}}\right)=\boxed{エ}$$

である。

(2) 放物線$y=\frac{1}{2}x^2$をCとし，C上に点$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$をとる。ただし，$a>0$とする。点Pにおける$C$の接線$\ell$の方程式は

$$y=\boxed{オ}x-\frac{1}{\boxed{カ}}a^2$$

である。直線ℓとx軸との交点Qの座標は$\left(\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}},\ 0\right)$である。点Qを通り$\ell$に垂直な直線を$m$とすると，$m$の方程式は

$$y=\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}x+\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

直線 m と y 軸との交点を A とする。三角形 APQ の面積を S とおくと

$$S = \frac{a\left(a^2 + \boxed{\text{セ}}\right)}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる。また，y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと

$$T = \frac{a\left(a^2 + \boxed{\text{タ}}\right)}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる。

$a > 0$ の範囲における $S - T$ の値について調べよう。

$$S - T = \frac{a\left(a^2 - \boxed{\text{テ}}\right)}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。$a > 0$ であるから，$S - T > 0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a > \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また，$a > 0$ のときの $S - T$ の増減を調べると，$S - T$ は $a = \boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる。

第3問 (配点　20)

Oを原点とする座標平面において，点A$(p,\ q)$と直線$y = 2x$を考える。ただし，$q \neq 0$，$q \neq 2p$とする。x軸に関してAと対称な点をB，直線$y = 2x$に関してAと対称な点をCとし，線分BCを1：3に内分する点をDとする。

(1) 点Bの座標は $\boxed{ア}$ である。$\boxed{ア}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $(p,\ q)$　① $(p,\ -q)$　② $(-p,\ q)$　③ $(-p,\ -q)$

(2) 点Cの座標を$(r,\ s)$とおくとき，rとsを，pとqを用いて表そう。

直線ACが直線$y = 2x$と垂直であるから，$s - q = \dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}(r - p)$が成り立つ。また，線分ACの中点$\left(\dfrac{p + r}{\boxed{オ}},\ \dfrac{q + s}{\boxed{オ}}\right)$は直線$y = 2x$上にある。これらのことにより

$$r = \frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}p + \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{ク}}q,\quad s = \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}p + \frac{\boxed{シ}}{\boxed{サ}}q$$

であることがわかる。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(3) 点 D は線分 BC を 1 : 3 に内分するので，(1)と(2)で求めた B と C の座標を用いると，D の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}p+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}}}q,\ \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}p-\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{チ}}}q\right)$$

となる。これにより

$$\mathrm{OD}^2=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\mathrm{OA}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つことがわかる。

(4) ① により，A が O を中心とする半径 2 の円の周上にあるとき，D は O を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ の円の周上にあることがわかる。

第4問 （配点　20）

(1)　a，b を実数として，$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 5$ とする。虚数 $1 + 2i$ が方程式 $P(x) = 0$ の解であるとき，a，b の値と他の解を求めよう。

$$P(1+2i) = \boxed{\text{アイウ}} - \boxed{\text{エ}}\,a + b + \left(\boxed{\text{オカ}} + \boxed{\text{キ}}\,a + 2b\right)i$$

となる。$P(1+2i) = 0$ であるから，$a = -\boxed{\text{ク}}$，$b = \boxed{\text{ケ}}$ であり

$$P(x) = x^3 - \boxed{\text{ク}}\,x^2 + \boxed{\text{ケ}}\,x - 5 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。

このとき，① により，$P\left(\boxed{\text{コ}}\right) = 0$ であるから，因数定理により

$$P(x) = \left(x - \boxed{\text{コ}}\right)\left(x^2 - \boxed{\text{サ}}\,x + \boxed{\text{シ}}\right)$$

が成り立つ。したがって，$P(x) = 0$ の $1 + 2i$ 以外の解は，$\boxed{\text{コ}}$ と $1 - \boxed{\text{ス}}\,i$ である。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(2) p を実数として，$Q(x) = x^3 + px^2 + px + 1$ とする。方程式 $Q(x) = 0$ は，異なる三つの負の実数解 α，β，γ をもつとする。ただし，$\alpha < \beta < \gamma$ とする。α，β，γ が条件

$$(\beta - \alpha) : (\gamma - \beta) = 3 : 2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たすとき，三つの解 α，β，γ と p の値を求めよう。

$Q\left(-\boxed{セ}\right) = 0$ であるから，因数定理により

$$Q(x) = \left(x + \boxed{セ}\right)\left\{x^2 + \left(p - \boxed{ソ}\right)x + 1\right\}$$

が成り立つ。

2 次方程式

$$x^2 + \left(p - \boxed{ソ}\right)x + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

が異なる二つの負の実数解をもつときの p のとり得る値の範囲は，$p > \boxed{タ}$ である。

解と係数の関係から，方程式③の解の一つは絶対値が 1 より大きく，他の解の絶対値は 1 より小さい。したがって，$\beta = -\boxed{セ}$ であり，α と γ は方程式③の解であることがわかる。解と係数の関係と条件②により

$$\alpha = -\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}},\quad \gamma = -\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}},\quad p = \frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}$$ である。

(下 書 き 用 紙)