2016 年度大学入試センター試験　解説〈数学Ⅰ・A〉

第 1 問

〔１〕

$$f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$$
$$=(1+2a)-(1+2a)x+(2-a)x$$
$$=\{(2-a)-(1+2a)\}x+(1+2a)$$
$$=(-3a+1)x+2a+1$$ ……ア，イ

(1)　$-3a+1\geqq 0$ を解くと，$a\leqq\dfrac{1}{3}$

$-3a+1<0$ を解くと，$a>\dfrac{1}{3}$

であるから，関数 $y=f(x)$ は，

$a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，増加関数　または　定数関数

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，減少関数

よって，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

$a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$f(0)=2a+1$ ……ウ，エ

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$f(1)=-a+2$ ……オ，カ

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値が $\dfrac{2(a+2)}{3}$ 以上となればよいから，条件は，

$a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$2a+1\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$　　これより，$\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ ……㋐

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$-a+2\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$　　これより，$\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{2}{5}$ ……㋑

よって，㋐または㋑より，$\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{2}{5}$ ……キ～コ

〔 2 〕

(1)(ⅰ) 集合$\{0\}$は，集合Aに含まれるから，$A \supset \{0\}$ $\left(\cdots\cdots ③\right)$ ……サ

(ⅱ) $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ は無理数であるから，集合Bの要素である。

よって，$\sqrt{28} \in B$ $\left(\cdots\cdots ⓪\right)$ ……シ

(ⅲ) 集合Aは，集合$\{0\}$と集合Aの和集合であるから，$A=\{0\} \cup A$ $\left(\cdots\cdots ⑤\right)$ ……ス

(ⅳ) 集合Aと集合Bの両方に属する要素はないから，集合Aと集合Bの共通部分は空集合である。

よって，$A \cap B=\varnothing$ $\left(\cdots\cdots ④\right)$ ……セ

(2)「$p \Longrightarrow q$」は，偽である。

（反例） $x=\sqrt{7}$ は無理数であるが，$x+\sqrt{28}=\sqrt{7}+2\sqrt{7}=3\sqrt{7}$ も無理数。

「$q \Longrightarrow p$」は，真である。

（証明） $x+\sqrt{28}$ が有理数のとき，mを自然数，nを整数として，$x+\sqrt{28}=\dfrac{n}{m}$ と表せる。これより，$x=\dfrac{n}{m}-\sqrt{28}$ であるから，これは無理数。

以上から，pはqであるための必要条件であるが，十分条件でない。 $\left(\cdots\cdots ①\right)$ ……ソ

「$p \Longrightarrow r$」は，偽である。

（反例） $x=\sqrt{2}$ は無理数であるが，$\sqrt{28}x=2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{14}$ も無理数。

「$r \Longrightarrow p$」は，偽である。

（反例） $x=0$ とすると，$\sqrt{28}x=2\sqrt{7}\cdot 0=0$ は有理数であるが，xも有理数である。

以上から，pはrであるための必要条件でも十分条件でもない。$\left(\cdots\cdots ③\right)$ ……タ

(注) 上記では，「$p \Longrightarrow r$」の反例に$x=\sqrt{2}$ を挙げたが，問題文にある$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いた反例は，例えば$x=1+\sqrt{7}$ などがある。

〔 3 〕

$$\begin{cases} x^2+(20-a^2)x-20a^2 \leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+4ax \geqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，$(x+20)(x-a^2) \leqq 0$

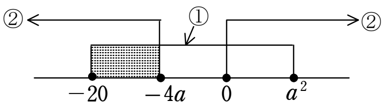
$-20 < a^2$ より，①の解は，$-20 \leqq x \leqq a^2$ ……チツテ

②より，$x(x+4a) \geqq 0$

仮定 $a \geqq 1$ より $-4a < 0$ であるから，②の解は，$x \leqq -4a$, $0 \leqq x$ ……トナ，ニ

①，②の連立不等式の解に負の実数が含まれるための条件は，

右図の網目部分が存在すること，つまり，



$$-20 \leqq -4a$$

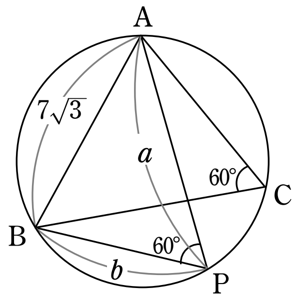
これより，$a \leqq 5$ であるから，仮定 $a \geqq 1$ と合わせて，

$$1 \leqq a \leqq 5$$ ……ヌ

第 2 問

〔 1 〕

条件を満たす△ABC およびその外接円，点 P は，右の図のようになる。



PA $= a$ ， PB $= b$ とおく。円周角の定理により，

$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{ACB} = 60^\circ$ である。

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = 2R \qquad \text{これより，} \ \frac{7\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

よって，

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \underline{\underline{7}}$$ ……**ア**

△ABP に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 - 2\,\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cos\angle\mathrm{APB}$$

$$\left(7\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab$$

これより， $a^2 + b^2 - ab = 147$ ……㋐

(1) 2PA $=$ 3PB のとき，PA : PB $= 3 : 2$ であるから，

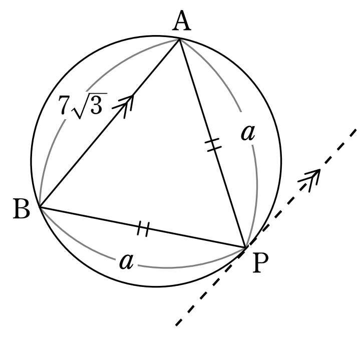
$$\mathrm{PA} = a = 3k, \ \mathrm{PB} = b = 2k \qquad (k > 0)$$

とおくと，㋐より，$(3k)^2 + (2k)^2 - 3k\cdot 2k = 147$

これより，$7k^2 = 147 \qquad k^2 = 21$

よって，$k = \sqrt{21}$ であるから，このとき，PA $= 3k = \underline{\underline{3\sqrt{21}}}$ ……**イ，ウエ**

(2) △PAB の面積が最大となるのは，底辺 AB から見た点 P の高さが最大となるときで，それは PA $=$ PB のときである(右図)。



そこで，$b = a$ とおくと，㋐より，

$$a^2 + a^2 - a^2 = 147$$

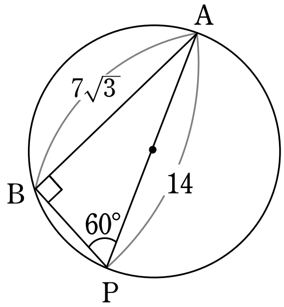
これより，$a^2 = 147 \qquad a = 7\sqrt{3}$

よって，このとき，PA $= a = \underline{\underline{7\sqrt{3}}}$ ……**オ，カ**

(3) ∠PBA=90° のとき，sin∠PBA $= 1$ となり，これが sin∠PBA の値が最大となるときである(右図)。

このとき，PA は円の直径であるから，

$$\mathrm{PA} = 2R = \underline{\underline{14}}$$ ……**キク**



$\triangle$ABP は，3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから，

$$\mathrm{PB}=\frac{1}{2}\mathrm{PA}=7$$

このとき，$\triangle \mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PB}=\frac{1}{2}\cdot7\sqrt{3}\cdot7=\frac{49\sqrt{3}}{2}$ ……**ケ～シ**

〔 2 〕

⓪……平均最高気温と購入額の散布図より，正しい。

①……1 日あたり平均降水量と購入額の散布図には，正の相関は認められないから，誤り。

②……平均湿度と購入額の散布図によれば，平均湿度が高くなるほど購入額の散らばりは大きくなっているから，誤り。

③……25℃以上の日数の割合と購入額の散布図より，正しい。

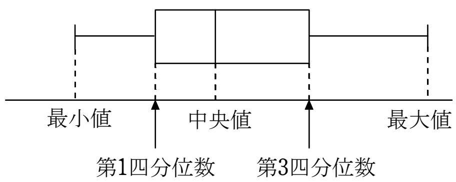
④……正の相関があると認められるのは，平均湿度と購入額の散布図のほか，平均最高気温と購入額の散布図もあるから，誤り。

以上から，正しいものは⓪ と③ である。 ……**ス，セ**

〔 3 〕

(1) 東京のヒストグラムによれば，最高気温で最も低いものは0℃以上5℃未満であり，これを満たす箱ひげ図は，c である。さらに，N 市のヒストグラムによれば，最高気温で最も低いものは－10℃以上－5℃未満であり，これを満たす箱ひげ図は，b である。
(M 市のヒストグラムによれば，最高気温で最も低いものは5℃以上10℃未満であり，これを満たす箱ひげ図は，a である。)

［箱ひげ図に関する用語］



以上により，正しい組合せは⑤ である。 ……**ソ**

(2)

⓪……東京と M 市の散布図において，最高気温の間に正の相関はないから，誤り。

①……東京と N 市，東京と M 市の散布図より，正しい。

②……⓪ と同じ理由で，誤り。

③……東京と O 市の散布図と，東京と N 市の散布図を比べると，正しい。

④……③ と逆の主張であり，誤り。

以上から，正しいものは，① と③ である。 ……**タ，チ**

(3) 以下，$n=365$ とする。N 市の摂氏を x ℃，華氏を y °F とすると，$y=\frac{9}{5}x+32$ が成り立つ。

よって，変量の各値について，$y_1=\dfrac{9}{5}x_1+32$，$y_2=\dfrac{9}{5}x_2+32$，……，$y_n=\dfrac{9}{5}x_n+32$

となり，平均値についても，$\overline{y}=\dfrac{9}{5}\overline{x}+32$ となる。よって，偏差については,

$y_k-\overline{y}=\dfrac{9}{5}(x_k-\overline{x})$ が成り立つ。

分散は，偏差の 2 乗の平均値であるから，

$$
\begin{aligned}
Y&=\frac{1}{n}\left\{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots\cdots+(y_n-\overline{y})^2\right\}\\
&=\frac{1}{n}\left[\left\{\frac{9}{5}(x_1-\overline{x})\right\}^2+\left\{\frac{9}{5}(x_2-\overline{x})\right\}^2+\cdots\cdots+\left\{\frac{9}{5}(x_n-\overline{x})\right\}^2\right]\\
&=\frac{81}{25}\cdot\frac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right\}\\
&=\frac{81}{25}X
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって，$\dfrac{Y}{X}=\dfrac{81}{25}$　(……⑨)　……ツ

次に，東京の摂氏を x' ℃とすると，

$$
\begin{aligned}
W&=\frac{1}{n}\left\{(x_1'-\overline{x'})(y_1-\overline{y})+(x_2'-\overline{x'})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_n'-\overline{x'})(y_n-\overline{y})\right\}\\
&=\frac{1}{n}\left\{(x_1'-\overline{x'})\cdot\frac{9}{5}(x_1-\overline{x})+(x_2'-\overline{x'})\cdot\frac{9}{5}(x_2-\overline{x})+\cdots\cdots+(x_n'-\overline{x'})\cdot\frac{9}{5}(x_n-\overline{x})\right\}\\
&=\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{n}\left\{(x_1'-\overline{x'})(x_1-\overline{x})+(x_2'-\overline{x'})(x_2-\overline{x})+\cdots\cdots+(x_n'-\overline{x'})(x_n-\overline{x})\right\}\\
&=\frac{9}{5}Z
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって，

$\dfrac{W}{Z}=\dfrac{9}{5}$　(……⑧)　……テ

相関係数は，$\dfrac{\text{共分散}}{\text{標準偏差の積}}\left(=\dfrac{s_{xy}}{s_xs_y}\right)$ であり，標準偏差は $\sqrt{(\text{分散})}$ であるから，東京の摂氏の分散を X' とすると，

$$U=\frac{Z}{\sqrt{X'}\sqrt{X}},\quad V=\frac{W}{\sqrt{X'}\sqrt{Y}}$$

が成り立つ。よって，

$\dfrac{V}{U}=\dfrac{\dfrac{W}{\sqrt{X'}\sqrt{Y}}}{\dfrac{Z}{\sqrt{X'}\sqrt{X}}}=\dfrac{W}{Z}\cdot\sqrt{\dfrac{X}{Y}}=\dfrac{9}{5}\cdot\sqrt{\dfrac{25}{81}}=1$　(……⑦)　……ト

第 3 問

赤球を$R_1 \sim R_4$，青球を$B_1 \sim B_3$，白球を$W_1 \sim W_5$と12個の球をすべて区別して考える。

Aさんと B さんの球の取り出し方は，${}_{12}P_2 = 12 \cdot 11$（通り）あり，その各々が同様に確からしいといえる。

(1)　「赤球か青球が少なくとも1個含まれている」ことの余事象は

「赤球も青球も含まれていない」つまり「すべて白球である」であるから，

そのような球の取り出し方は，${}_5P_2 = 5 \cdot 4$（通り）

よって，求める確率は，$1 - \dfrac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} = 1 - \dfrac{5}{33} = \underline{\underline{\dfrac{28}{33}}}$　……**ア～エ**

(2)　A さんが赤球を取り出す事象をA_r，B さんが白球を取り出す事象をB_wとする。

$n(A_r \cap B_w) = 4 \cdot 5$（通り）であるから，$P(A_r \cap B_w) = \dfrac{4 \cdot 5}{12 \cdot 11} = \underline{\underline{\dfrac{5}{33}}}$　……**オ，カキ**

一方，$P(A_r) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ であるから，求める条件付き確率は，

$$P_{A_r}(B_w) = \frac{P(A_r \cap B_w)}{P(A_r)} = \frac{\frac{5}{33}}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{5}{11}}}$$　……**ク，ケコ**

(3)　A さんが青球を取り出す事象をA_b，A さんが白球を取り出す事象をA_wとする。

$n(A_b \cap B_w) = 3 \cdot 5$（通り）より，$P(A_b \cap B_w) = \dfrac{3 \cdot 5}{12 \cdot 11} = \underline{\underline{\dfrac{5}{44}}}$　……**サ，シス**

$n(A_w \cap B_w) = {}_5P_2 = 5 \cdot 4$（通り）より，$P(A_w \cap B_w) = \dfrac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} = \dfrac{5}{33}$

これと(2)より，

$$\begin{aligned} P(B_w) &= P(A_r \cap B_w) + P(A_b \cap B_w) + P(A_w \cap B_w) \\ &= \frac{5}{33} + \frac{5}{44} + \frac{5}{33} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}} \end{aligned}$$　……**セ，ソタ**

よって，求める条件付き確率は，

$$P_{B_w}(A_w) = \frac{P(B_w \cap A_w)}{P(B_w)} = \frac{\frac{5}{33}}{\frac{5}{12}} = \underline{\underline{\frac{4}{11}}}$$　……**チ，ツテ**

第 4 問

(1)　$92x+197y=1$　……㋐

92 と 197 において互除法を用いると，

$197=92\cdot2+13$ より，$13=197-92\cdot2$　……㋑

$92=13\cdot7+1$ より，$1=92-13\cdot7$　……㋒

㋒に㋑を代入すると，

$$\begin{aligned}1&=92-(197-92\cdot2)\cdot7\\&=92-197\cdot7+92\cdot14\\&=92\cdot15+197\cdot(-7)\end{aligned}$$

これより，$92\cdot15+197\cdot(-7)=1$　……㋓

㋐－㋓より，

$92(x-15)+197(y+7)=0$

よって，$92(x-15)=197(-y-7)$

ここに，92 と 197 は互いに素であるから，k を整数として，

$x-15=197k$
$-y-7=92k$

とおくことができる。よって，

$x=197k+15$，$y=-92k-7$　(㋐の一般解)

このうち，$|x|$ が最小の場合を考えると，$k=0$ のときの

$x=\underline{\underline{15}}$，$y=\underline{\underline{-7}}$　……**ア～エ**

である。

$92x+197y=10$　……㋔

㋓より，$92\cdot150+197\cdot(-70)=10$　……㋕

であるから，㋔－㋕より，

$92(x-150)+197(y+70)=0$

よって，$92(x-150)=197(-y-70)$

上と同様に，l を整数として，

$x-150=197l$
$-y-70=92l$

とおくことができる。よって，

$x=197l+150$，$y=-92l-70$　(㋔の一般解)

このうち，$|x|$ が最小の場合を考えると，$l=-1$ のときの，

$x=\underline{\underline{-47}}$，$y=\underline{\underline{22}}$　……**オ～ケ**

(2)　$11011_{(2)}=1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2+1$

$=16+8+0+2+1=27$

これを4進法で表すと，下の筆算より，

$$\begin{array}{r|l} 4\,) & 27 \\ \hline 4\,) & \;\;6 \quad \cdots 3 \\ \hline & \;\;1 \quad \cdots 2 \end{array}$$

$27=1\cdot4^2+2\cdot4+3=\underline{\underline{123_{(4)}}}$　……**コサシ**

次に，

⓪　$0.3_{(6)}=3\cdot\dfrac{1}{6^1}=\dfrac{1}{2}$

①　$0.4_{(6)}=4\cdot\dfrac{1}{6^1}=\dfrac{2}{3}$

②　$0.33_{(6)}=3\cdot\dfrac{1}{6^1}+3\cdot\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{7}{12}$

③　$0.43_{(6)}=4\cdot\dfrac{1}{6^1}+3\cdot\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{3}{4}$

④　$0.033_{(6)}=3\cdot\dfrac{1}{6^2}+3\cdot\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{72}=\dfrac{7}{72}$

⑤　$0.043_{(6)}=4\cdot\dfrac{1}{6^2}+3\cdot\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{72}=\dfrac{1}{8}$

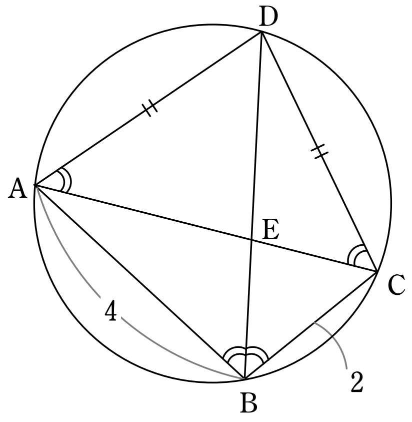
上記の中で，有限小数として表せるのは

$\dfrac{1}{2}(=0.5)$，$\dfrac{3}{4}(=0.75)$，$\dfrac{1}{8}(=0.125)$

であるから，答は，⓪，③，⑤　……**ス，セ，ソ**

第 5 問

四角形ABCDを図示すると，右のようになる。



$\mathrm{DA}=\mathrm{DC}$ より，

$$\angle \mathrm{DAC}=\angle \mathrm{DCA}$$

円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{DAC}=\angle \mathrm{DBC}\ ,\quad \angle \mathrm{DCA}=\underline{\angle \mathrm{DBA}}$$

よって答えは，______線部の

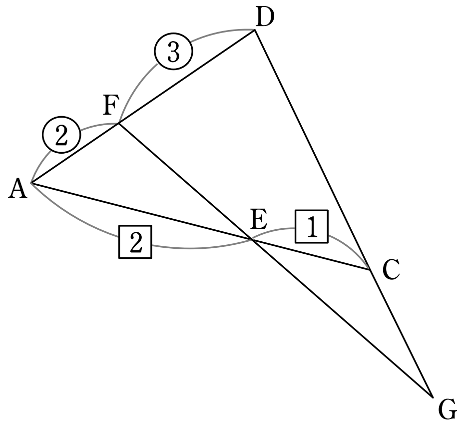
$\angle \mathrm{ABD}$　（……⓪）　……**ア**

このことより，$\angle \mathrm{DBA}=\angle \mathrm{DBC}$ であるから，

角の二等分線の性質より，

$$\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$　……**イ，ウ**

次に，右図でメネラウスの定理より，



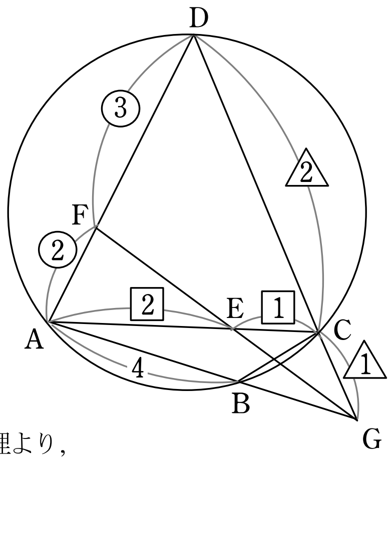
$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}}=1$$

であるから，

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{3}{2}=1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{1}{3}$　……**エ，オ**

(1)　直線ABがGを通る場合の図は，右のようになる。



$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{1}{3}$ より，$\mathrm{GC}:\mathrm{CD}=1:2$ である。

すると，チェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}}\cdot\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}}=1$$

であるから，

$$\frac{4}{\mathrm{BG}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=1$$

よって，$\mathrm{BG}=3$　……**カ**

また，$\mathrm{GC}=k,\ \mathrm{GD}=3k\ (k>0)$とおけるから，方べきの定理より，

$$\mathrm{GC}\cdot\mathrm{GD}=\mathrm{GB}\cdot\mathrm{GA}$$

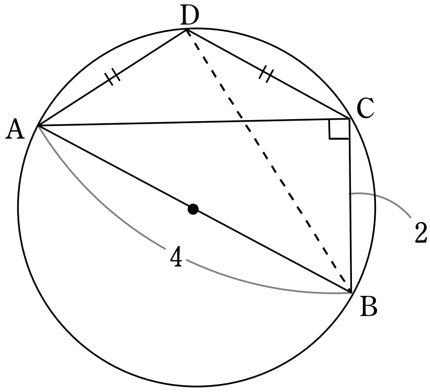
これより，

$$k\cdot 3k=3\cdot(3+4)$$
$$k^2=7$$
$$k=\sqrt{7}$$

よって，$\mathrm{DC}=3k-k=2k=2\sqrt{7}$　……**キ，ク**

(2)　四角形 ABCD の外接円，つまり△ABC の外接円の直径が最小となるのは，AB(＝4) が円の直径となるときである。なぜなら，AB は円の弦であるから，
AB ≦（円の直径），つまり 4 ≦（円の直径）であるからである。

よって，条件を満たす外接円の直径は　4　……**ケ**



　このとき，$\angle ACB = 90°$，また，AB : BC ＝ 2 : 1 より，

$$\angle BAC = 30°$$　……**コサ**

　また，このとき，$\angle CBD = \angle DBA = \dfrac{60°}{2} = 30°$ であるから，

$$\overparen{BC} = \overparen{CD} = \overparen{DA}$$

よって，BC ＝ CD ＝ DA ＝ 2 であり，
$\angle DCA = \angle BAC$ より，DC // AB である。
このとき△HAE ∽ △GCE であるから，

$$HA : GC = AE : CE = 2 : 1$$

また，GC : CD ＝ 1 : 2 と CD ＝ 2 より，

$$GC = 1$$

よって，

$$AH = 2GC = 2$$　……**シ**