

2017 年度大学入試センター試験 解説 〈数学Ⅱ・B〉

第 1 問

〔 1 〕

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15} & \dots\dots① \\ \cos \alpha \cos \beta = -\frac{2\sqrt{15}}{15} & \dots\dots② \end{cases}$$

において、①で2倍角の公式を用いると、

$$(2\cos^2 \alpha - 1) + (2\cos^2 \beta - 1) = \frac{4}{15}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1 = \frac{2}{15}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{17}{15} \dots\dots⑦$$

……アイ、ウエ

が得られる。

また、②の両辺を2乗することで、

$$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \left(-\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)^2 \quad \text{より、} \quad \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4 \cdot 15}{15^2}$$

よって、

$$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{15} \dots\dots⑧$$

……オ

⑦、⑧より、 $\cos^2 \alpha$ 、 $\cos^2 \beta$ は、解と係数の関係より、 $t$ についての2次方程式

$$15t^2 - 17t + 4 = 0, \quad \text{つまり、} \quad (5t - 4)(3t - 1) = 0 \dots\dots⑨$$

の2解である。

⑨の2解は $t = \frac{4}{5}, \frac{1}{3}$ であるが、

$$|\cos \alpha| \geq |\cos \beta|, \quad \text{つまり、} \quad \cos^2 \alpha \geq \cos^2 \beta$$

であるから、

$$\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{3}$$

……カ、キ、ク、ケ

さらに、②より、 $\cos \alpha$ と $\cos \beta$ は異符号であるから、 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ より、

$\alpha, \beta$ の一方は $\frac{\pi}{2}$ より小さく、一方は $\frac{\pi}{2}$ より大きい。

これと $\alpha < \beta$ より、 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi$ となり、 $\cos \alpha > 0, \cos \beta < 0$

したがって、

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

……コ～ソ

[ 2 ]

$$B(p, \log_2 p), C(q, \log_2 q)$$

について、真数の条件より、

$$p > 0, q > 0 \quad \dots\dots \text{タ}$$

である。

このとき、 $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ,  $B(p, \log_2 p)$  より、線分 AB を 1:2 に内分する点の座標は、

$$\left( \frac{2 \times 0 + 1 \times p}{1 + 2}, \frac{2 \times \frac{3}{2} + 1 \times \log_2 p}{1 + 2} \right)$$

すなわち、

$$\left( \frac{1}{3}p, \frac{1}{3}\log_2 p + 1 \right) \quad \dots\dots \text{チ} \sim \text{ナ}$$

と表される。これが  $C(q, \log_2 q)$  と一致するので、

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p = q & \dots\dots \text{④} \\ \frac{1}{3}\log_2 p + 1 = \log_2 q & \dots\dots \text{⑤} \end{cases}$$

が成り立つ。

⑤より、

$$\begin{aligned} \log_2 p + 3 &= 3\log_2 q \\ \log_2 p + \log_2 2^3 &= \log_2 q^3 \\ \log_2 p \cdot 2^3 &= \log_2 q^3 \end{aligned}$$

であるから、

$$8p = q^3 \quad \text{より、} \quad p = \frac{1}{8}q^3 \quad \dots\dots \text{⑥} \quad \dots\dots \text{ニ, 又, ネ}$$

また、④より、 $p = 3q$  ……⑦ であるから、

$$3q = \frac{1}{8}q^3$$

より、 $q^2 = 24$

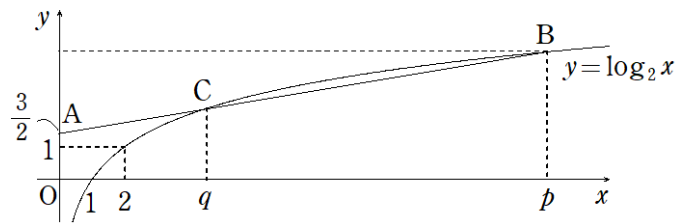
よって、 $q > 0$  に注意すると

$$q = \underline{\underline{2\sqrt{6}}} \quad \dots\dots \text{ヒ, フ}$$

である。

これと⑦より、

$$p = 3 \times 2\sqrt{6} = \underline{\underline{6\sqrt{6}}} \quad \dots\dots \text{ノ, ハ}$$



また、Cのy座標 $\log_2(2\sqrt{6})$ について、

$$\begin{aligned}\log_2(2\sqrt{6}) &= \log_2 2 + \log_2 \sqrt{6} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \log_2 6 \\ &= 1 + \frac{1}{2} (\log_2 2 + \log_2 3) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log_2 3 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{0.4771}{2 \cdot 0.3010} \\ &= 1.5 + 0.79 \dots \\ &= 2.29 \dots\end{aligned}$$

であるから、 $\log_2(2\sqrt{6})$ の値を、小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると

$$2.3 \quad \left( \dots \underline{\underline{\textcircled{6}}} \right)$$

……^

## 第 2 問

(1)  $y = x^2 + 1$  より,

$$y' = 2x$$

よって,  $x = t$  での微分係数は  $2t$  なので,  
点  $(t, t^2 + 1)$  における  $C$  の接線の方程式は,

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 1$$

すなわち,

$$y = \underline{2t}x - \underline{t^2} + \underline{1} \quad \dots\dots② \quad \dots\dots\text{ア, イ}$$

この直線が  $P(a, 2a)$  を通るとき,  $2a = 2t \cdot a - t^2 + 1$  より,

$$t^2 - \underline{2at} + \underline{2a} - \underline{1} = 0 \quad \dots\dots③$$

を満たす。よって, ③より,  $(t - 2a + 1)(t - 1) = 0$  となり,

$$t = \underline{2a - 1}, \underline{1} \quad \dots\dots④$$

である。

ここで,  $P$  を通る  $C$  の接線が 2 本あるのは, ④で得られた 2 つの接点の  $x$  座標,  
 $2a - 1$  と  $1$  が異なるときである。

よって,

$$2a - 1 \neq 1$$

すなわち,

$$a \neq \underline{1}$$

であり, このとき,  $P$  を通る 2 本の接線の方程式は, ②に④の  $t$  の値を代入して,

$$y = 2(2a - 1)x - (2a - 1)^2 + 1$$

すなわち,

$$y = (\underline{4a - 2})x - \underline{4a^2} + \underline{4a} \quad \dots\dots①$$

と

$$y = 2 \cdot 1x - 1^2 + 1$$

すなわち,

$$y = \underline{2}x$$

である。

(2)  $r = -4a^2 + 4a$  であるから,  $r > 0$  となるのは,

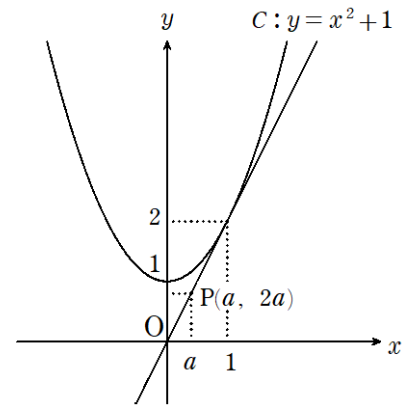
$$-4a^2 + 4a > 0$$

$$a(a - 1) < 0$$

より,

$$\underline{0} < a < \underline{1}$$

のときである。



……ウ, エ, オ

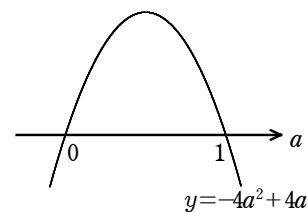
……カ, キ, ク

……ケ

……コ, サ, シ, ス

……セ

……ソ, タ



このとき、 $\triangle OPR$  は、 $OR$  を底辺と見たとき、高さが  $P$  の  $x$  座標  $a$  である三角形なので、その面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \times (-4a^2 + 4a) \times a$$

$$= \underline{\underline{2(a^2 - a^3)}} \quad \dots\dots \text{チ, ツ, テ}$$

となる。

$$f(a) = 2(a^2 - a^3) \text{ とおくと,}$$

$$f'(a) = 2(2a - 3a^2)$$

$$= -6a \left( a - \frac{2}{3} \right)$$

であるから、 $0 < a < 1$  のとき、 $f(a)$  の増減は右下のようになる。

よって、 $S (= f(a))$  は  $a = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$  のとき、 $\dots\dots \text{ト, ナ}$

最大値

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right\}$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 2 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{27}}}$$

をとる。

(3) 求める面積  $T$  は右図の網目部分の面積で、

$$T = \int_0^a [x^2 + 1 - \{(4a - 2)x - 4a^2 + 4a\}] dx$$

$$= \int_0^a \{x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 - 4a + 1\} dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 - (2a - 1)x^2 + (4a^2 - 4a + 1)x \right]_0^a$$

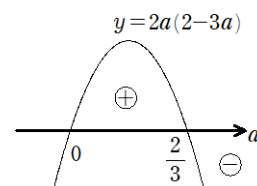
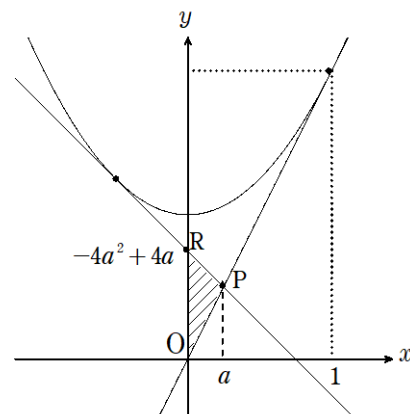
$$= \frac{1}{3}a^3 - (2a - 1)a^2 + (4a^2 - 4a + 1)a$$

$$= \underline{\underline{\frac{7}{3}a^3 - 3a^2 + a}} \quad \dots\dots \text{ノ, ハ, ヒ, フ}$$

よって、

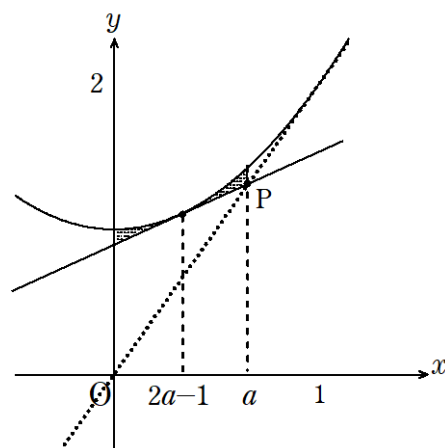
$$g(a) = \frac{7}{3}a^3 - 3a^2 + a$$

とおくと、



$a$	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗		↘	

$\dots\dots \text{ニ, ヌネ}$



$$g'(a) = 7a^2 - 6a + 1$$

ここで、 $g'(a) = 0$  となる  $a$  は  $a = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}$  であり、

$$\frac{2}{3} - \frac{3 + \sqrt{2}}{7} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{21} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{18}}{21} > 0$$

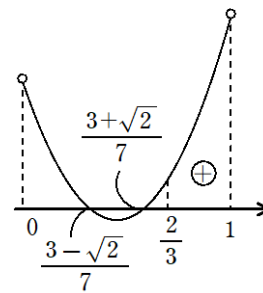
であるから、

$$\frac{2}{3} \leq a < 1 \text{ で } g'(a) > 0$$

よって、 $T(=g(a))$  は  $\frac{2}{3} \leq a < 1$  で増加する。

(……②)

……^



(注)  $T$  の計算を行うには、数学Ⅲの範囲の計算であるが、

$$\int (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1} (x-a)^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を用いる方法もあり、接線と囲む面積を求める際に特に有用である。

$$l: y = (4a-2)x - 4a^2 + 4a$$

は、 $C$  の  $x = 2a - 1$  における接線なので、

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 - \{(4a-2)x - 4a^2 + 4a\} \\ &= x^2 - 2(2a-1)x + (2a-1)^2 \\ &= \{x - (2a-1)\}^2 \end{aligned}$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a \{x - (2a-1)\}^2 dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} \{x - (2a-1)\}^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3} (-a+1)^3 - \frac{1}{3} (-2a+1)^3 \\ &= \frac{7}{3} a^3 - 3a^2 + a \end{aligned}$$

……ノ、ハ、ヒ、フ

## 第 3 問

(1)  $\{s_n\}$  は初項が 1, 公比が 2 の等比数列であるから,

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = 4$$

よって,

$$s_1 s_2 s_3 = 1 \times 2 \times 4 = \underline{8}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 1 + 2 + 4 = \underline{7}$$

……ア, イ

(2)  $\{s_n\}$  は初項が  $x$ , 公比が  $r$  の等比数列であるから,

$$s_1 = x, \quad s_2 = xr, \quad s_3 = xr^2 \quad \dots\dots⑥$$

よって,

$$s_1 s_2 s_3 = x^3 r^3 = (xr)^3$$

これと①より,

$$(xr)^3 = a^3$$

であり,  $x, r$  は実数であるから

$$xr = \underline{a} \quad \dots\dots③$$

……ウ

また, ②, ⑥より,

$$x + xr + xr^2 = b$$

この両辺に  $r$  をかけると

$$xr + (xr) \cdot r + (xr) \cdot r^2 = br$$

であるから, ③を用いて

$$a + ar + ar^2 = br$$

より,

$$\underline{a}r^2 + (\underline{a} - \underline{b})r + \underline{a} = 0 \quad \dots\dots④$$

……エ, オ, カ, キ

$a \neq 0$  より, ④は  $r$  についての 2 次方程式となるから, ④を満たす実数  $r$  が存在する条件は,

$$(\text{④の判別式}) \geq 0$$

より,

$$(a - b)^2 - 4a^2 \geq 0$$

すなわち,

$$\underline{3}a^2 + \underline{2}ab - b^2 \leq 0 \quad \dots\dots⑤$$

……ク, ケ

(3)  $a = 64, b = 336$  のとき, ④より,

$$64r^2 - 272r + 64 = 0$$

$$4r^2 - 17r + 4 = 0$$

$$(4r - 1)(r - 4) = 0$$

であるから

$$r = \frac{1}{4}, 4$$

$r > 1$ であるから、

$$r = \underline{4}$$

……コ

であり、③より、

$$x \cdot 4 = 64$$

よって、

$$x = \underline{16}$$

……サシ

このとき、 $\{s_n\}$ の一般項  $s_n$ は

$$s_n = 16 \cdot 4^{n-1} = 4^{n+1}$$

であるから、

$$t_n = 4^{n+1} \log_4 4^{n+1}$$

すなわち、

$$t_n = (n+1) \cdot 4^{n+1}$$

……ス、セ

したがって、 $U_n = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$ は、

$$U_n = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^4 + \dots + (n+1) \cdot 4^{n+1}$$

$$- ) \quad 4U_n = \frac{2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 + \dots + n \cdot 4^{n+1} + (n+1) \cdot 4^{n+2}}{-3U_n = 2 \cdot 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{n+1} - (n+1) \cdot 4^{n+2}}$$

より、

$$\begin{aligned} -3U_n &= 4^2 + 4^2(1+4+4^2+\dots+4^{n-1}) - (n+1) \cdot 4^{n+2} \\ &= 4^2 + 4^2 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} - (n+1) \cdot 4^{n+2} \\ &= \frac{32}{3} + \frac{4^{n+2} - 3(n+1) \cdot 4^{n+2}}{3} \\ &= -\frac{(3n+2) \cdot 4^{n+2}}{3} + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

よって、

$$U_n = \underline{\underline{\frac{3n+2}{9} \cdot 4^{n+2} - \frac{32}{9}}}$$

……ソ～ナ



## 第 4 問

(1) 題意より、円周上の点 A, B, C, D, E, F の配置は  
右下図のようになる。

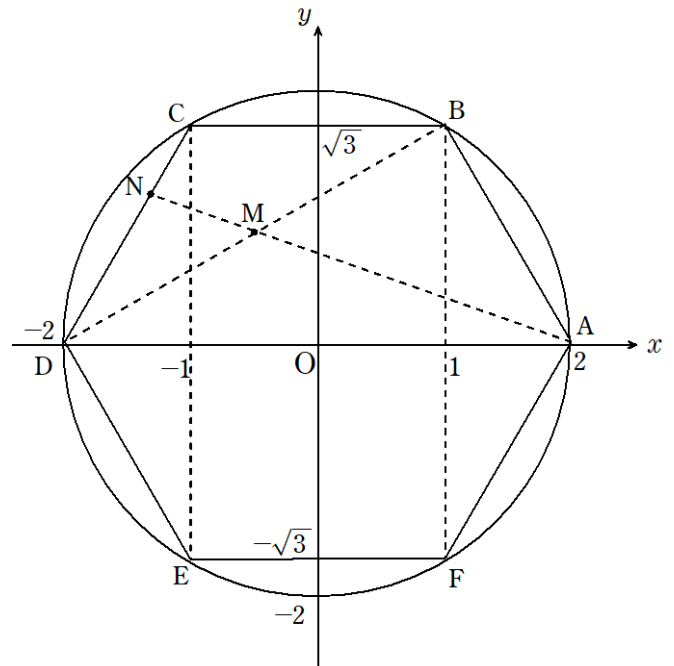
よって、 $B\left(2\cos\frac{\pi}{3}, 2\sin\frac{\pi}{3}\right)$  より、B の座標は

$$B(\underline{1}, \underline{\sqrt{3}}) \quad \dots\dots \text{ア, イ}$$

である。また、右図より、D の座標は

$$D(\underline{-2}, 0) \quad \dots\dots \text{ウ}$$

である。



(2) 線分 BD の中点 M の座標は

$$M\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{0+\sqrt{3}}{2}\right)$$

すなわち、

$$M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。よって、

$$\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{1}{2}-2, \frac{\sqrt{3}}{2}-0\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \dots\dots \text{エ～キ}$$

$$\overrightarrow{DC} = (-1-(-2), \sqrt{3}-0) = (\underline{1}, \underline{\sqrt{3}}) \quad \dots\dots \text{ク, ケ}$$

であるから、直線 AM と直線 CD の交点 N に対して、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AM} \\ &= (2, 0) + r\left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(2 - \frac{5}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \quad \dots\dots \text{①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{DC} \\ &= (-2, 0) + s(1, \sqrt{3}) \\ &= (s-2, \sqrt{3}s) \quad \dots\dots \text{②} \end{aligned}$$

の 2 通りで表すと、①、②より、

$$\begin{cases} 2 - \frac{5}{2}r = s - 2 & \dots\dots \text{③} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{3}s & \dots\dots \text{④} \end{cases}$$

よって、④より、 $r = 2s$  であるから、これを③に代入すると、

$$2 - 5s = s - 2$$

したがって、

$$s = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{4}{3}$$

……コ～ス

よって、②より、

$$\overrightarrow{ON} = \left( \frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

……セ～ツ

(3) P(1, a) であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EP} &= (1 - (-1), a - (-\sqrt{3})) \\ &= (2, a + \sqrt{3}) \quad \dots\dots \text{テ, ト, ナ} \end{aligned}$$

ここで、H の y 座標は a であるから、H(x, a) とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= (x - (-1), a - \sqrt{3}) \\ &= (x + 1, a - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

EP ⊥ CH より、 $\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$  であるから、

$$(2, a + \sqrt{3}) \cdot (x + 1, a - \sqrt{3}) = 0$$

より、

$$\begin{aligned} 2(x + 1) + (a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) &= 0 \\ 2x + 2 + a^2 - 3 &= 0 \\ 2x &= -a^2 + 1 \end{aligned}$$

よって、

$$x = \frac{-a^2 + 1}{2}$$

となり、

$$H \left( \frac{-a^2 + 1}{2}, a \right) \quad \dots\dots \text{ニ～ハ}$$

である。さらに、

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + 1}$$

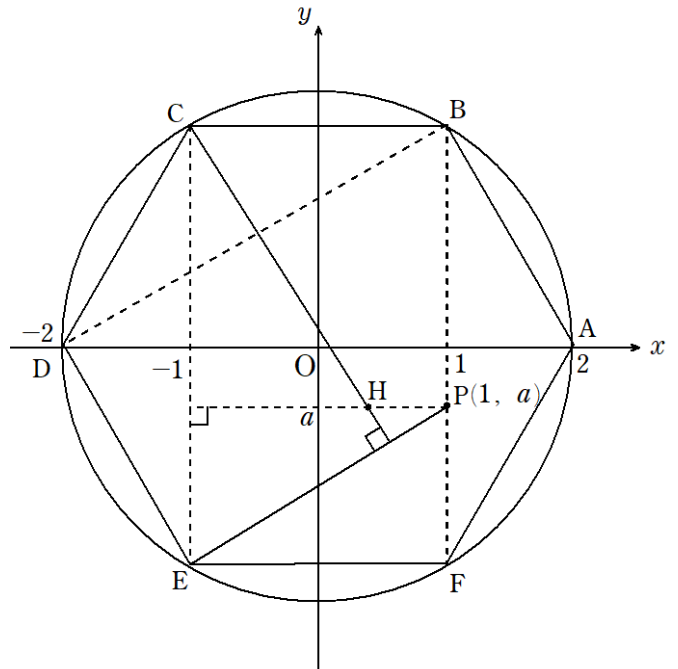
$$|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(\frac{-a^2 + 1}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4}} = \sqrt{\frac{(a^2 + 1)^2}{4}} = \frac{a^2 + 1}{2}$$

であるから、 $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OH}$  のなす角  $\theta$  が  $\cos \theta = \frac{12}{13}$  を満たすとき、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OH} = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OH}| \cos \theta$$

より、

$$(1, a) \cdot \left( \frac{-a^2 + 1}{2}, a \right) = \sqrt{a^2 + 1} \cdot \frac{a^2 + 1}{2} \cdot \frac{12}{13}$$



すなわち,

$$\frac{-a^2+1}{2}+a^2=\frac{6}{13}(a^2+1)\sqrt{a^2+1}$$

$$\frac{a^2+1}{2}=\frac{6}{13}(a^2+1)\sqrt{a^2+1}$$

$$\sqrt{a^2+1}=\frac{13}{12}$$

$$a^2+1=\frac{13^2}{12^2}$$

これより,

$$a^2=\frac{13^2}{12^2}-1=\frac{13^2-12^2}{12^2}=\frac{(13+12)(13-12)}{12^2}=\frac{5^2}{12^2}$$

であるから,

$$a=\pm\frac{5}{12}$$

……ヒ, フ, ヘ