2017 年度大学入試センター試験　解説〈数学Ⅰ・A〉

第 1 問

〔１〕

$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$　……①　のとき，

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{x}+\left(\frac{2}{x}\right)^2=x^2+\frac{4}{x^2}+4=9+4=\underline{\underline{13}}$$ ……アイ

$x>0$ より，$x+\dfrac{2}{x}>0$ であるから，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{13}$　……②

次に，解答記号 **ウ** を含む等式の右辺を$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}-a\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-a\right)&=x\left(x^2+\frac{4}{x^2}-a\right)+\frac{2}{x}\left(x^2+\frac{4}{x^2}-a\right)\\&=x^3+\frac{4}{x}-ax+2x+\frac{8}{x^3}-\frac{2a}{x}\\&=x^3+\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(2-a)x+\frac{2(2-a)}{x}}+\frac{8}{x^3}\end{aligned}$$

これが $x^3+\dfrac{8}{x^3}$ と等しいとき，($\sim\sim$ 部)$=0$ より，$2-a=0$

よって，$a=\underline{\underline{2}}$ ……ウ（→注）

このとき，

$$\begin{aligned}x^3+\frac{8}{x^3}&=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-2\right)=\sqrt{13}(9-2)\qquad(①,\ ②より)\\&=\underline{\underline{7\sqrt{13}}}\end{aligned}$$ ……エ，オカ

また，①より，$\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)^2=9^2$ であるから，$(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}+\left(\dfrac{4}{x^2}\right)^2=81$

これより，$x^4+\dfrac{16}{x^4}+8=81$　すなわち，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=\underline{\underline{73}}$ ……キク

(注) 3 乗の和の因数分解 $\left[p^3+q^3=(p+q)(p^2-pq+q^2)\right]$ を用いると，

$$x^3+\frac{8}{x^3}=x^3+\left(\frac{2}{x}\right)^3=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left\{x^2-x\cdot\frac{2}{x}+\left(\frac{2}{x}\right)^2\right\}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2-2+\frac{4}{x^2}\right)$$

これより，$a=\underline{\underline{2}}$ ……ウ

〔２〕

$p : x = 1$

$q : x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$ または $x = -1$

より，

$\overline{p} : x \neq 1$

$\overline{q} : x \neq 1$ かつ $x \neq -1$

(1)　$q \Longrightarrow p$ は偽（反例は $x = -1$），$p \Longrightarrow q$ は真であるから，

q は p であるための「必要条件だが十分条件でない」（……⓪）　……ケ

$\overline{p} \Longrightarrow q$ は偽（反例は $x = 0$），$q \Longrightarrow \overline{p}$ は偽（反例は $x = 1$）であるから，

$\overline{p}$ は q であるための「必要条件でも十分条件でもない」（……③）　……コ

$\left(p \text{ または } \overline{q}\right) : x \neq -1$　である。

$\left(p \text{ または } \overline{q}\right) \Longrightarrow q$ は偽（反例は $x = 0$），$q \Longrightarrow \left(p \text{ または } \overline{q}\right)$ は偽（反例は $x = -1$）であるから，

$\left(p \text{ または } \overline{q}\right)$ は q であるための「必要条件でも十分条件でもない」（……③）　……サ

$\left(\overline{p} \text{ かつ } q\right) : x = -1$　である。

$\left(\overline{p} \text{ かつ } q\right) \Longrightarrow q$ は真，$q \Longrightarrow \left(\overline{p} \text{ かつ } q\right)$ は偽（反例は $x = 1$）であるから，

$\left(\overline{p} \text{ かつ } q\right)$ は q であるための「十分条件だが必要条件でない」（……①）　……シ

(2)　$r : x > 0$

A ……　$\left(p \text{ かつ } q\right) : x = 1$　であるから，

$\left(p \text{ かつ } q\right) \Longrightarrow r$ は真。

B ……　$q \Longrightarrow r$ は偽（反例は $x = -1$）。

C ……　$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ は真。

以上より，正しいものは「A は真，B は偽，C は真」（……②）　……ス

〔３〕

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2-2(3a^2+5a)x+18a^4+30a^3+49a^2+16 \\ &= \left\{x-(3a^2+5a)\right\}^2-(3a^2+5a)^2+18a^4+30a^3+49a^2+16 \\ &= \left\{x-(3a^2+5a)\right\}^2-(9a^4+30a^3+25a^2)+18a^4+30a^3+49a^2+16 \\ &= \left\{x-(3a^2+5a)\right\}^2+9a^4+24a^2+16 \end{aligned}$$

よって，$y=g(x)$ のグラフの頂点は，

$$\left(\underline{\underline{3}}a^2+\underline{\underline{5}}a,\ \underline{\underline{9}}a^4+\underline{\underline{24}}a^2+\underline{\underline{16}}\right)$$ ……**セ～ト**

$$3a^2+5a=3\left(a^2+\frac{5}{3}a\right)=3\left\{\left(a+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right\}=3\left(a+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$$

より，a が実数全体を動くとき，頂点の x 座標の最小値は

$$-\frac{\underline{\underline{25}}}{\underline{\underline{12}}}\quad\left(a=-\frac{5}{6}\text{ のとき}\right)$$ ……**ナニ，ヌネ**

次に，$t=a^2$ とおくと，頂点の y 座標は，

$$9(a^2)^2+24a^2+16=9t^2+24t+16=(3t+4)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる。a が実数全体を動くとき，$t \geqq 0$ であるから，このとき

$$3t+4 \geqq 4$$

このとき①の最小値は，

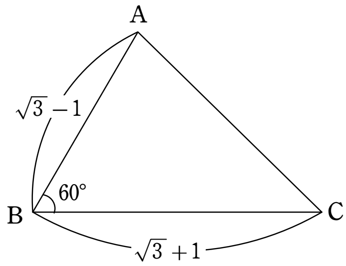
$$4^2=\underline{\underline{16}}$$ ……**ノハ**

（最小値を与えるのは，$t=0$ すなわち $a=0$ のとき）

第 2 問

〔 1 〕

(1)　余弦定理より，



$$\begin{aligned}AC^2&=AB^2+BC^2-2\,AB\cdot BC\cos\angle ABC\\&=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2-2\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\frac{1}{2}\\&=4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}-2\\&=6\end{aligned}$$

よって，

$$AC=\underline{\underline{\sqrt{6}}}$$ ……**ア**

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

よって，

$$R=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}$$ ……**イ**

ふたたび，正弦定理より，

$$2R=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$$

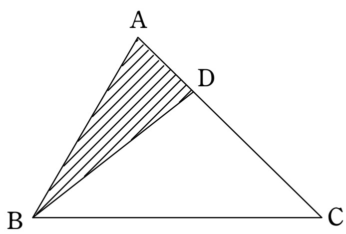
であるから，

$$\sin\angle BAC=\frac{BC}{2R}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}}$$ ……**ウ，エ，オ**

(2)

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

であるから，この値が $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ であるとき，



$$\begin{aligned}AB\cdot AD&=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\&=\frac{4}{3\left(\sqrt{3}+1\right)}\\&=\frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\\&=\frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3(3-1)}\\&=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}-2}{3}}}\end{aligned}$$ ……**カ，キ，ク，ケ**

よって，

$$\mathrm{AD}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{AB}}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$ ……**コ，サ**

〔２〕

(1)　⓪，①……X と V の間には，相関は認められないが，X と Y の間には正の相関が認められる。

→ ⓪は正しくない。①は正しい。

②，③……V が最大のジャンプは，X でも Y でも最大ではない。

→ ②も③も正しくない。

④……Y が最小のジャンプは X では最小ではない。

→ ④は正しい。

⑤……X が80以上のジャンプの中には，V が93よりも小さいものもある。

→ ⑤は正しくない。

⑥……Y が55以上かつ V が94以上のジャンプは存在しない。

→ ⑥は正しい。

以上より，正しいものは ①，④，⑥　……シ，ス，セ

(2)
$$X=1.80\times(D-125.0)+60.0=1.80\times D-165.0$$
より，
$$X-\overline{X}=(1.80\times D-165.0)-\left(1.80\times\overline{D}-165.0\right)=1.80\times\left(D-\overline{D}\right)\quad\cdots\cdots㋐$$

よって，X の分散 ${s_X}^2$ は，D の分散 ${s_D}^2$ の $1.80^2=3.24$（倍）になる。（……④）　……ソ

（注）分散 $s^2=\dfrac{1}{n}\left\{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right\}$

次に，㋐より
$$(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})=1.80\times(D-\overline{D})(Y-\overline{Y})$$
であるから，X と Y の共分散 s_{XY} は，D と Y の共分散 s_{DY} の1.80倍である。（……③）　……タ

（注）x と y の共分散 $s_{xy}=\dfrac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\right\}$

さらに，X と Y の相関係数 $\dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y}$ は，D と Y の相関係数 $\dfrac{s_{DY}}{s_D s_Y}$ との比を求めると，
$$\frac{s_{XY}}{s_X s_Y}:\frac{s_{DY}}{s_D s_Y}=\frac{1.80\,s_{DY}}{\sqrt{1.80^2}\,s_D s_Y}:\frac{s_{DY}}{s_D s_Y}=1:1$$
となるから，X と Y の相関係数は，D と Y の相関係数の1倍である。（……②）　……チ

(3)　1回目の $X+Y$ の最小値は108.0であるから，
ヒストグラムは図2のAが，箱ひげ図は図3のaが1回目のものである。
（$X+Y$ の最小値は，図2のBでは105未満，図3のbでは105未満である。）

よって，1回目の $X+Y$ の値について，
ヒストグラムと箱ひげ図との組合せとして正しいものは ⓪　……ツ

また，図3から，

⓪……四分位範囲は1回目が2回目よりも小さい。

　→ ⓪は正しくない。

①……中央値は1回目が2回目よりも大きい。

　→ ①は正しい。

②……最大値は1回目が2回目よりも大きい。

　→ ②は正しくない。

③……最小値は1回目が2回目よりも大きい。

　→ ③は正しくない。

以上より，正しいものは ① ……テ

第 3 問

(1)　事象E_1の余事象は，

「A, B がともにはずれくじを引く」

事象である。その確率は，

$$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

であるから，事象E_1の確率$P(E_1)$は

$$1-\frac{1}{6}=\underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$
……**ア，イ**

(2)　事象Eは，

「A, B, C の 3 人のうち 1 人だけがはずれくじを引く」

事象と同じであるから，

その 1 人が誰であるかにより，$\underline{\underline{①}}$と$\underline{\underline{③}}$と$\underline{\underline{⑤}}$の和事象であると考えることができる。……**ウ，エ，オ**

上のそれぞれの事象の確率は，

①……$\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，③……$\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，⑤……$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{6}$

であり，これらの事象は排反であるから，事象Eの確率$P(E)$は，

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$
……**カ，キ**

(3)　事象E_1が起こったときの事象Eが起こる条件付き確率$P_{E_1}(E)$は，

$$P_{E_1}(E)=\frac{P(E_1\cap E)}{P(E_1)}$$

であるが，$E_1\cap E=E$であるから，

$$P_{E_1}(E)=\frac{P(E)}{P(E_1)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$
……**ク，ケ**

(4)　はずれくじは 2 本であるから，A がはずれくじを引けば，　B と C の少なくとも一方はあたりくじを引くことになる。

また，A があたりくじを引いた場合は，B と C のいずれか一方だけがあたりくじを引かなければならない。このとき，B と C のいずれか一方のみがはずれくじを引くことになる。

よって，事象E_2は，$\underline{\underline{⓪}}$と$\underline{\underline{③}}$と$\underline{\underline{⑤}}$の和事象と考えることができる。……**コ，サ，シ**

上のそれぞれの事象の確率は，

⓪……$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，③……$\frac{1}{6}$，⑤……$\frac{1}{6}$

であり，これらの事象は排反であるから，事象E_2の確率$P(E_2)$は，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$
……**ス，セ**

一方，事象 E_3 の余事象は,

「A と C がともにはずれくじを引く（このとき，B はあたりくじを引く）」

事象である。その確率は,

$$\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

であるから，事象 E_3 の確率 $P(E_3)$ は,

$$1-\frac{1}{6}=\underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

……**ソ**，**タ**

(5)　(3)と同様に考えれば

$$P_{E_2}(E)=\frac{P\left(E_2\cap E\right)}{P(E_2)}=\frac{P(E)}{P(E_2)}\text{，}\ P_{E_3}(E)=\frac{P\left(E_3\cap E\right)}{P(E_3)}=\frac{P(E)}{P(E_3)}$$

であるから,

$$P(E_1)=P(E_2)=P(E_3)\ \left(=\frac{5}{6}\right)$$

より,

$$P_{E_1}(E)=P_{E_2}(E)=P_{E_3}(E)$$

よって

$$p_1=p_2=p_3$$

となるから，答えは $\underline{\underline{⑥}}$

……**チ**

第 4 問

(1) 自然数が4 で割り切れるのは，その下2桁の数が4 で割り切れるときであるから，

2桁の自然数「7a」が4で割り切れるようなaを求めると，

$a=\underline{\underline{2}}, \underline{\underline{6}}$ ……ア，イ

(2) 4桁の自然数「7b5c」が4で割り切れるとき，下2桁の数「5c」が4で割り切れるcを求めると，

$c=2, 6$ ……①

次に，自然数が9で割り切れるのは，その各位の数の和が9で割り切れるときであるから，

「7b5c」が9で割り切れるのは，$7+b+5+c=12+b+c$ が9 で割り切れるときである。

$0 \leqq b+c \leqq 18$ より，

$b+c=6,\ 15$

となるが，①より，

$c=2$ のとき$b=4$，$c=6$ のとき$b=0, 9$

と決まるから，

$(b, c)=(4, 2), (0, 6), (9, 6)$

の$\underline{\underline{3}}$ 通りある。 ……ウ

このとき，上のそれぞれに対し，$7b5c=7452, 7056, 7956$ と決まるから，

最小の値は 7056 で，このとき$b=\underline{\underline{0}}$, $c=\underline{\underline{6}}$ ……エ，オ

最大の値は 7956 で，このとき$b=\underline{\underline{9}}$, $c=\underline{\underline{6}}$ ……カ，キ

また，$7b5c=(6\times n)^2=36n^2$ となるとき，上の3つの数を36で割った商はそれぞれ

$207, 196, 221$ となるが，このうち平方数(n^2)は$196=14^2$ のみであるから，このとき，

$b=\underline{\underline{0}}$, $c=\underline{\underline{6}}$, $n=\underline{\underline{14}}$ ……ク，ケ，コサ

(3) $1188=2^2\times3^3\times11^1$ であるから，1188の正の約数の個数は，

$(2+1)\times(3+1)\times(1+1)=\underline{\underline{24}}$(個) ……シス（→注１）

このうち，2の倍数の個数は，$1188=2\times(2^1\times3^3\times11^1)$ より，〰〰部の約数の個数を求めて，

$(1+1)\times(3+1)\times(1+1)=\underline{\underline{16}}$(個) ……セソ

$4(=2^2)$ の倍数の個数は，$1188=2^2\times(3^3\times11^1)$ より，〰〰部の約数の個数を求めて，

$(3+1)\times(1+1)=\underline{\underline{8}}$(個) ……タ

さらに，1188のすべての正の約数の積は

$P=2^l\times3^m\times11^n$ （l，m，n は正の整数)

と表せるが，

$P=(3^m\times11^n)\times2^l$

より，これを2進法で表したとき末尾に続く0の個数はl個である。 ……(*)

したがって，P が 2 で何回割り切れるかを求めればよい。

シス，**セソ**より，1188 の正の約数の中には 2 の倍数が 16 個，4 の倍数が 8 個ある (8 以上の 2 の累乗はない)。2 の倍数はそれぞれ 2 で 1 回割り切れ，4 の倍数はそれぞれ 2 でさらに 1 回割り切れるから，P が 2 で割り切れる回数は $16+8=24$ (回) であるので，

求める答えは $\underline{\underline{24}}$ (個)　……**チツ**

(注 1) 素因数分解した形が，

$$a^l \times b^m \times c^n \times \cdots\cdots \quad (a,\ b,\ c\ \cdots\cdots \text{ は異なる素数})$$

で表される自然数の正の約数の個数は，

$$(l+1)\times(m+1)\times(n+1)\times\cdots\cdots \quad (\text{個})$$

である。

(注 2) (*) の箇所が分かり辛ければ，10 進法での表現に置き換えて考えるとよい。

例えば，4200000 は

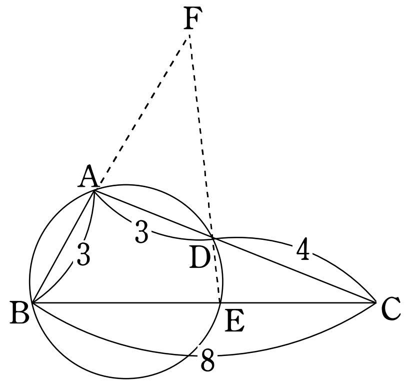
$$4200000=2\times3\times7\times10^5$$

のように 10 で 5 回割り切れるから，10 進法で表したとき末尾に続く 0 の個数は 5 個である。

2 進法で考えるときも同様に 2 で割り切れる回数に着目することで，末尾に続く 0 の個数を求めることができる。

第 5 問

(1)　△ABC および点 D，△ABD の外接円，さらに点 E を図示すると右のようになる。



このとき，方べきの定理より，

$$\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CB}=\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CA}=4\cdot 7=\underline{\underline{28}}$$ ……**アイ**

であるから，

$$\mathrm{CE}=\frac{28}{\mathrm{BC}}=\frac{7}{\underline{\underline{2}}}$$ ……**ウ，エ**

次に， △ABC と直線 DE に関するメネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}}=1$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{7}{2}}{8-\frac{7}{2}}=1$$

よって，

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{7}=\frac{12}{\underline{\underline{7}}}$$ ……**オカ，キ**

このとき，

$$\mathrm{AF}:\mathrm{BA}=7:(12-7)=7:5$$

であるから，

$$\mathrm{AF}=\frac{7}{5}\mathrm{BA}=\frac{7}{5}\times 3=\frac{21}{\underline{\underline{5}}}$$ ……**クケ，コ**

(2)　余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\,\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 8}=\frac{24}{2\cdot 3\cdot 8}=\frac{1}{2}$$

よって，

$$\angle\mathrm{ABC}=\underline{\underline{60}}^\circ$$ ……**サシ**

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

であり， △ABC の内接円の半径を r とすると，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}=\frac{1}{2}r(8+7+3)=6\sqrt{3}$$

であるから，

$$r=\frac{2\times 6\sqrt{3}}{8+7+3}=\frac{12\sqrt{3}}{18}=\frac{2\sqrt{3}}{\underline{\underline{3}}}$$ ……**ス，セ，ソ**

ここで，Iから辺BCに垂線IHを下ろすと，

IHは△ABCの内接円の半径で$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

またBIは∠ABCの二等分線であるから，

$$\angle \mathrm{IBH}=30^\circ$$

よって，△IBHは3辺の長さの比が

IH：BI：BH＝1：2：$\sqrt{3}$ の直角三角形であるから，

$$\mathrm{BI}=2\mathrm{IH}=2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{3}}}$$

……**タ，チ，ツ**