2017 年度大学入試センター試験　解説〈数学Ⅱ・B〉

第 1 問

〔1〕

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

において，①で 2 倍角の公式を用いると，

$$(2\cos^2\alpha - 1) + (2\cos^2\beta - 1) = \frac{4}{15}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = \frac{2}{15}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{17}{15} \quad \cdots\cdots ⑦$$

……**アイ，ウエ**

が得られる。

また，②の両辺を 2 乗することで，

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \left(-\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)^2 \quad \text{より，} \quad \cos^2\alpha\cos^2\beta = \frac{4\cdot 15}{15^2}$$

よって，

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \frac{4}{15} \quad \cdots\cdots ⑧$$

……**オ**

⑦，⑧より，$\cos^2\alpha, \cos^2\beta$ は，解と係数の関係より，t についての 2 次方程式

$$15t^2 - 17t + 4 = 0 \text{，つまり，} (5t-4)(3t-1) = 0 \quad \cdots\cdots ⑨$$

の 2 解である。

⑨の 2 解は $t = \dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{3}$ であるが，

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \text{，つまり，} \cos\alpha^2 \geqq \cos^2\beta$$

であるから，

$$\cos^2\alpha = \frac{4}{5}, \cos^2\beta = \frac{1}{3}$$

……**カ，キ，ク，ケ**

さらに，②より，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ は異符号であるから，$0 \leqq \alpha \leqq \pi, 0 \leqq \beta \leqq \pi$ より，

α, β の一方は $\dfrac{\pi}{2}$ より小さく，一方は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きい。

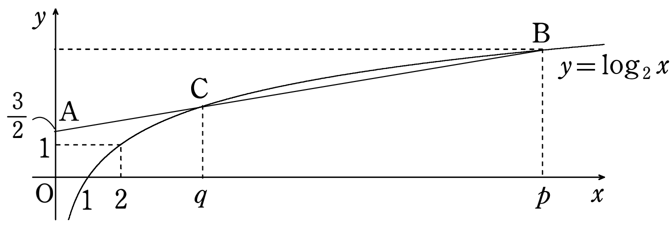
これと $\alpha < \beta$ より，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta \leqq \pi$ となり，$\cos\alpha > 0, \cos\beta < 0$

したがって，

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

……**コ～ソ**

〔２〕



$B(p,\ \log_2 p)$, $C(q,\ \log_2 q)$

について，真数の条件より，

$p>\underline{\underline{0}},\ q>0$ ……タ

である。

このとき， $A\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $B(p,\ \log_2 p)$ より，線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標は，

$$\left(\frac{2\times 0+1\times p}{1+2},\ \frac{2\times\frac{3}{2}+1\times\log_2 p}{1+2}\right)$$

すなわち，

$$\left(\frac{1}{\underline{\underline{3}}}p,\ \frac{1}{\underline{\underline{3}}}\log_2 p+\underline{\underline{1}}\right)$$ ……チ～ナ

と表される。これが $C(q,\ \log_2 q)$ と一致するので，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}p=q & \cdots\cdots ④\\[2mm] \dfrac{1}{3}\log_2 p+1=\log_2 q & \cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

が成り立つ。

⑤より，

$$\log_2 p+3=3\log_2 q$$
$$\log_2 p+\log_2 2^3=\log_2 q^3$$
$$\log_2 p\cdot 2^3=\log_2 q^3$$

であるから，

$8p=q^3$ より， $p=\dfrac{1}{\underline{\underline{8}}}q^{\underline{\underline{3}}}$ ……⑥ ……ニ，ヌ，ネ

また，④より， $p=3q$ ……⑦ であるから，

$$3q=\frac{1}{8}q^3$$

より， $q^2=24$

よって， $q>0$ に注意すると

$q=\underline{\underline{2\sqrt{6}}}$ ……ヒ，フ

である。

これと⑦より，

$p=3\times 2\sqrt{6}=\underline{\underline{6\sqrt{6}}}$ ……ノ，ハ

また，C の y 座標 $\log_2(2\sqrt{6})$ について，

$$\begin{aligned}\log_2(2\sqrt{6}) &= \log_2 2 + \log_2 \sqrt{6} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\log_2 6 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 3) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_2 3 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{0.4771}{2\cdot 0.3010} \\ &= 1.5 + 0.79\cdots \\ &= 2.29\cdots\end{aligned}$$

であるから，$\log_2(2\sqrt{6})$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると

2.3 $\left(\cdots\cdots ⑥\right)$ ……へ

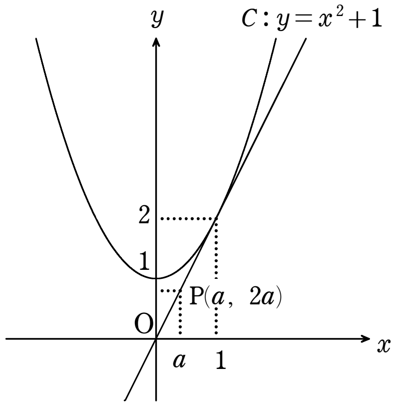
第 2 問

(1) $y=x^2+1$ より，

$$y'=2x$$

よって， $x=t$ での微分係数は $2t$ なので，

点 $(t,\ t^2+1)$ における C の接線の方程式は，



$$y=2t(x-t)+t^2+1$$

すなわち，

$$y=\underline{\underline{2}}tx-t^2+\underline{\underline{1}} \quad \cdots\cdots②$$ ……**ア，イ**

この直線が $\mathrm{P}(a,\ 2a)$ を通るとき， $2a=2t\cdot a-t^2+1$ より，

$$t^2-\underline{\underline{2}}at+\underline{\underline{2}}a-\underline{\underline{1}}=0 \quad \cdots\cdots③$$ ……**ウ，エ，オ**

を満たす。よって，③より， $(t-2a+1)(t-1)=0$ となり，

$$t=\underline{\underline{2}}a-\underline{\underline{1}},\ \underline{\underline{1}} \quad \cdots\cdots④$$ ……**カ，キ，ク**

である。

ここで，P を通る C の接線が 2 本あるのは，④で得られた 2 つの接点の x 座標，

$2a-1$ と 1 が異なるときである。

よって，

$$2a-1\neq 1$$

すなわち，

$$a\neq \underline{\underline{1}}$$ ……**ケ**

であり，このとき，P を通る 2 本の接線の方程式は，②に④の t の値を代入して，

$$y=2(2a-1)x-(2a-1)^2+1$$

すなわち，

$$y=(\underline{\underline{4}}a-\underline{\underline{2}})x-\underline{\underline{4}}a^2+\underline{\underline{4}}a \quad \cdots\cdots①$$ ……**コ，サ，シ，ス**

と

$$y=2\cdot 1x-1^2+1$$

すなわち，

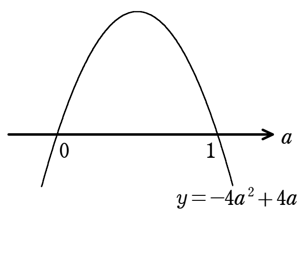
$$y=\underline{\underline{2}}x$$ ……**セ**

である。

(2) $r=-4a^2+4a$ であるから， $r>0$ となるのは，

$$-4a^2+4a>0$$

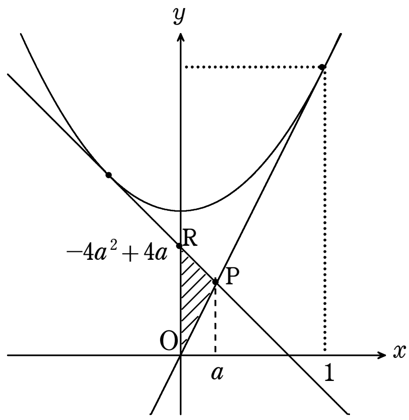
$$a(a-1)<0$$



より，

$$\underline{\underline{0}}<a<\underline{\underline{1}}$$ ……**ソ，タ**

のときである。



このとき，△OPR は，OR を底辺と見たとき，高さが P の x 座標 a である三角形なので，その面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\times(-4a^2+4a)\times a$$

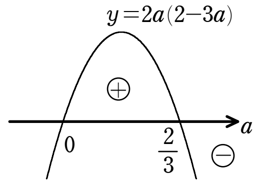
$$=\underline{\underline{2}}\left(a^{\underline{\underline{2}}}-a^{\underline{\underline{3}}}\right) \qquad \cdots\cdots \textbf{チ，ツ，テ}$$

となる。

$f(a)=2(a^2-a^3)$ とおくと，

$$f'(a)=2(2a-3a^2)$$

$$=-6a\left(a-\frac{2}{3}\right)$$



であるから，$0<a<1$ のとき，$f(a)$ の増減は右下のようになる。

よって，$S\ (=f(a))$ は $a=\frac{2}{\underline{\underline{3}}}$ のとき，……**ト，ナ**

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗		↘	

最大値

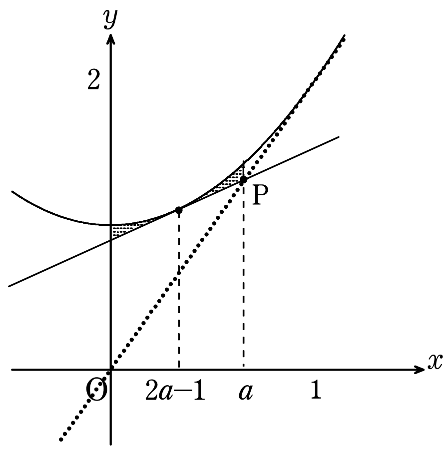
$$f\left(\frac{2}{3}\right)=2\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}$$

$$=2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$=2\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{\underline{\underline{27}}} \qquad \cdots\cdots \textbf{ニ，ヌネ}$$

をとる。

(3) 求める面積 T は右図の網目部分の面積で，



$$T=\int_0^a\left[x^2+1-\{(4a-2)x-4a^2+4a\}\right]dx$$

$$=\int_0^a\{x^2-(4a-2)x+4a^2-4a+1\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-(2a-1)x^2+(4a^2-4a+1)x\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3}a^3-(2a-1)a^2+(4a^2-4a+1)a$$

$$=\frac{7}{\underline{\underline{3}}}a^3-\underline{\underline{3}}\,a^2+\underline{\underline{a}} \qquad \cdots\cdots \textbf{ノ，ハ，ヒ，フ}$$

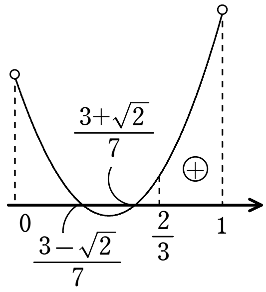
よって，

$$g(a)=\frac{7}{3}a^3-3a^2+a$$

とおくと，

$g'(a)=7a^2-6a+1$

ここで，$g'(a)=0$ となる a は $a=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{7}$ であり，



$$\frac{2}{3}-\frac{3+\sqrt{2}}{7}=\frac{5-3\sqrt{2}}{21}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{18}}{21}>0$$

であるから，

$\dfrac{2}{3}\leqq a<1$ で　$g'(a)>0$

よって，$T\bigl(=g(a)\bigr)$ は $\dfrac{2}{3}\leqq a<1$ で増加する。

$(\cdots\cdots②)$　　　　　……ヘ

（注）T の計算を行うには，数学Ⅲの範囲の計算であるが，

$$\int(x-a)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}+C\quad（C\text{ は積分定数}）$$

を用いる方法もあり，接線と囲む面積を求める際に特に有用である。

$l:y=(4a-2)x-4a^2+4a$

は，C の　$x=2a-1$　における接線なので，

$$\begin{aligned}&x^2+1-\{(4a-2)x-4a^2+4a\}\\&=x^2-2(2a-1)x+(2a-1)^2\\&=\{x-(2a-1)\}^2\end{aligned}$$

と表される。よって，

$$\begin{aligned}T&=\int_0^a\{x-(2a-1)\}^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}\{x-(2a-1)\}^3\right]_0^a\\&=\frac{1}{3}(-a+1)^3-\frac{1}{3}(-2a+1)^3\\&=\frac{7}{3}a^3-3a^2+a\end{aligned}$$

……ノ，ハ，ヒ，フ

第 3 問

(1) $\{s_n\}$ は初項が 1，公比が 2 の等比数列であるから，

$$s_1=1,\quad s_2=2,\quad s_3=4$$

よって，

$$s_1 s_2 s_3=1\times2\times4=\underline{\underline{8}},\quad s_1+s_2+s_3=1+2+4=\underline{\underline{7}}$$ ……ア，イ

(2) $\{s_n\}$ は初項が x，公比が r の等比数列であるから，

$$s_1=x,\quad s_2=xr,\quad s_3=xr^2 \quad ……⑥$$

よって，

$$s_1 s_2 s_3=x^3r^3=(xr)^3$$

これと①より，

$$(xr)^3=a^3$$

であり，x，r は実数であるから

$$xr=\underline{\underline{a}} \quad ……③$$ ……ウ

また，②，⑥より，

$$x+xr+xr^2=b$$

この両辺に r をかけると

$$xr+(xr)\cdot r+(xr)\cdot r^2=br$$

であるから，③を用いて

$$a+ar+ar^2=br$$

より，

$$\underline{\underline{a}}r^2+(\underline{\underline{a}}-\underline{\underline{b}})r+\underline{\underline{a}}=0 \quad ……④$$ ……エ，オ，カ，キ

$a\neq0$ より，④は r についての 2 次方程式となるから，④を満たす実数 r が存在する条件は，

(④の判別式)$\geqq0$

より，

$$(a-b)^2-4a^2\geqq0$$

すなわち，

$$\underline{\underline{3}}a^2+\underline{\underline{2}}ab-b^2\leqq0 \quad ……⑤$$ ……ク，ケ

(3) $a=64$, $b=336$ のとき，④より，

$$64r^2-272r+64=0$$
$$4r^2-17r+4=0$$
$$(4r-1)(r-4)=0$$

であるから

$$r=\frac{1}{4},\ 4$$

$r>1$ であるから，

$$r=\underline{\underline{4}} \quad \cdots\cdots \text{コ}$$

であり，③より，

$$x\cdot 4=64$$

よって，

$$x=\underline{\underline{16}} \quad \cdots\cdots \text{サシ}$$

このとき，$\{s_n\}$ の一般項 s_n は

$$s_n=16\cdot 4^{n-1}=4^{n+1}$$

であるから，

$$t_n=4^{n+1}\log_4 4^{n+1}$$

すなわち，

$$t_n=(n+\underline{\underline{1}})\cdot 4^{n+\underline{\underline{1}}} \quad \cdots\cdots \text{ス，セ}$$

したがって，$U_n=t_1+t_2+t_3+\cdots\cdots+t_n$ は，

$$\begin{array}{rrcl}
 & U_n & = & 2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+4\cdot 4^4+\cdots\cdots+(n+1)\cdot 4^{n+1} \\
-) & 4U_n & = & \qquad\quad 2\cdot 4^3+3\cdot 4^4+\cdots\cdots+\quad n\cdot 4^{n+1}+(n+1)\cdot 4^{n+2} \\ \hline
 & -3U_n & = & 2\cdot 4^2+\quad 4^3+\quad 4^4+\cdots\cdots+\qquad 4^{n+1}-(n+1)\cdot 4^{n+2}
\end{array}$$

より，

$$\begin{aligned}
-3U_n &= 4^2+4^2(1+4+4^2+\cdots\cdots+4^{n-1})-(n+1)\cdot 4^{n+2} \\
&= 4^2+4^2\cdot\frac{4^n-1}{4-1}-(n+1)\cdot 4^{n+2} \\
&= \frac{32}{3}+\frac{4^{n+2}-3(n+1)\cdot 4^{n+2}}{3} \\
&= -\frac{(3n+2)\cdot 4^{n+2}}{3}+\frac{32}{3}
\end{aligned}$$

よって，

$$U_n=\underline{\underline{\frac{3n+2}{9}}}\cdot 4^{n+\underline{\underline{2}}}-\underline{\underline{\frac{32}{9}}} \quad \cdots\cdots \text{ソ〜ナ}$$

第 4 問

(1) 題意より，円周上の点 A，B，C，D，E，F の配置は右下図のようになる。

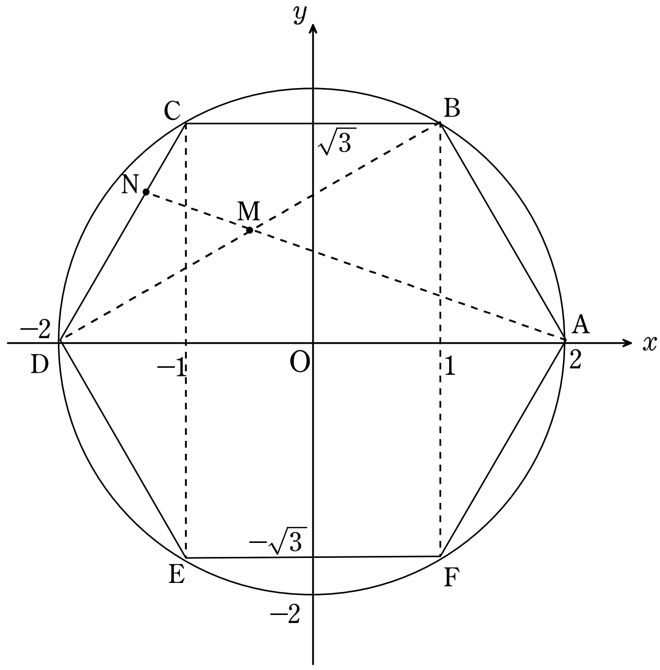
よって，$B\left(2\cos\dfrac{\pi}{3},\ 2\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，B の座標は

$B(1,\ \sqrt{3})$ ……**ア，イ**

である。また，右図より，D の座標は

$D(-2,\ 0)$ ……**ウ**

である。



(2) 線分BD の中点M の座標は

$$M\left(\frac{-2+1}{2},\ \frac{0+\sqrt{3}}{2}\right)$$

すなわち，

$$M\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である．よって，

$$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2}-2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)=\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ ……**エ～キ**

$$\overrightarrow{DC}=\left(-1-(-2),\ \sqrt{3}-0\right)=\left(1,\ \sqrt{3}\right)$$ ……**ク，ケ**

であるから，直線AM と直線CD の交点N に対して，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}&=\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{AM}\\&=(2,\ 0)+r\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\left(2-\frac{5}{2}r,\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}&=\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{DC}\\&=(-2,\ 0)+s\left(1,\ \sqrt{3}\right)\\&=\left(s-2,\ \sqrt{3}s\right)\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

の 2 通りで表すと，①，②より，

$$\begin{cases}2-\dfrac{5}{2}r=s-2 & \cdots\cdots③\\[2mm] \dfrac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}s & \cdots\cdots④\end{cases}$$

よって，④より，$r=2s$ であるから，これを③に代入すると，

$$2-5s=s-2$$

したがって，

$$s=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}\ ,\quad r=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$ ……コ～ス

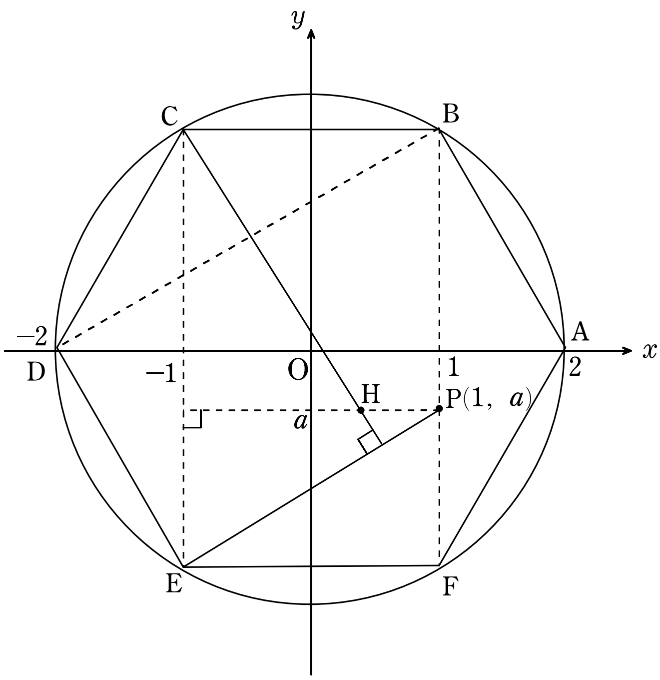
よって，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-\underline{\underline{\frac{4}{3}}},\ \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}\right)$$ ……セ～ツ

(3) $\mathrm{P}(1,\ a)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\left(1-(-1), a-(-\sqrt{3})\right)$$
$$=\left(\underline{\underline{2}},\ \underline{\underline{a}}+\underline{\underline{\sqrt{3}}}\right)$$ ……テ，ト，ナ

ここで，H の y 座標は a であるから，　$\mathrm{H}(x,\ a)$ とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\left(x-(-1),\ a-(-\sqrt{3})\right)$$
$$=\left(x+1,\ a-\sqrt{3}\right)$$

$\mathrm{EP}\perp\mathrm{CH}$ より，　$\overrightarrow{\mathrm{EP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ であるから，

$$\left(2,\ a+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+1,\ a-\sqrt{3}\right)=0$$

より，

$$2(x+1)+\left(a+\sqrt{3}\right)\left(a-\sqrt{3}\right)=0$$
$$2x+2+a^2-3=0$$
$$2x=-a^2+1$$

よって，

$$x=\frac{-a^2+1}{2}$$

となり，

$$\mathrm{H}\left(\underline{\underline{\frac{-a^2+1}{2}}},\ \underline{\underline{a}}\right)$$ ……ニ～ハ

である。さらに，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{a^2+1}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\sqrt{\left(\frac{-a^2+1}{2}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{a^4+2a^2+1}{4}}=\sqrt{\frac{\left(a^2+1\right)^2}{4}}=\frac{a^2+1}{2}$$

であるから，　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角 θ が $\cos\theta=\frac{12}{13}$ を満たすとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|\cos\theta$$

より，

$$(1,\ a)\cdot\left(\frac{-a^2+1}{2},\ a\right)=\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{a^2+1}{2}\cdot\frac{12}{13}$$

すなわち，

$$\frac{-a^2+1}{2}+a^2=\frac{6}{13}(a^2+1)\sqrt{a^2+1}$$

$$\frac{a^2+1}{2}=\frac{6}{13}(a^2+1)\sqrt{a^2+1}$$

$$\sqrt{a^2+1}=\frac{13}{12}$$

$$a^2+1=\frac{13^2}{12^2}$$

これより，

$$a^2=\frac{13^2}{12^2}-1=\frac{13^2-12^2}{12^2}=\frac{(13+12)(13-12)}{12^2}=\frac{5^2}{12^2}$$

であるから，

$$a=\pm\underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$ ……**ヒ，フ，ヘ**