2020 年度大学入試センター試験 解説〈数学Ⅱ・B〉

第 1 問

〔1〕

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots①$$

の右辺に対して，加法定理を用いると，

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3}\left(\cos\theta\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}\cos\theta+\frac{\underline{\underline{3}}}{2}\sin\theta\end{aligned}$$

……ア，イ，ウ

である。

　ここで①は，

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\theta<0$$

つまり，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta-\sin\theta<0$$

より，

$$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta<0 \quad \cdots\cdots②$$

と表せることに注意する。

　②について三角関数の合成を用いると，

$$\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{3}<0$$

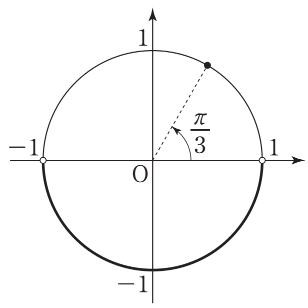
つまり，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\underline{\underline{3}}}\right)<0 \quad \cdots\cdots③$$

……エ

と変形できる。

$$0\leqq\theta<2\pi \quad より，\ \frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi \quad \cdots\cdots④$$



　③，④より，

$$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$$

　したがって，求める範囲は，

$$\frac{2}{\underline{\underline{3}}}\pi<\theta<\frac{5}{\underline{\underline{3}}}\pi$$

……オ，カ，キ，ク

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta \geqq 0$，$\cos\theta \geqq 0$

これらが，2次方程式

$$25x^2-35x+k=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

の2解なので，解と係数の関係から，

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{35}{25}\\[2mm] \sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{25}\end{cases} \quad \text{つまり，} \quad \begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5} & \cdots\cdots⑥\\[2mm] \sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{25} & \cdots\cdots⑦\end{cases}$$

ここで，⑥より，

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{49}{25} \quad \text{つまり，} \quad \sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{49}{25}$$

これと，⑦ および $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，

$$1+2\cdot\frac{k}{25}=\frac{49}{25}$$

よって，

$$k=12$$ ……ケコ

これより，⑤は

$$25x^2-35x+12=0$$

となるから，

$$(5x-3)(5x-4)=0$$

よって，

$$x=\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$$

これらが $\sin\theta$，$\cos\theta$ のいずれかであり，$\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとすると，

$$\sin\theta=\frac{4}{5},\quad \cos\theta=\frac{3}{5}$$ ……サ，シ，ス，セ

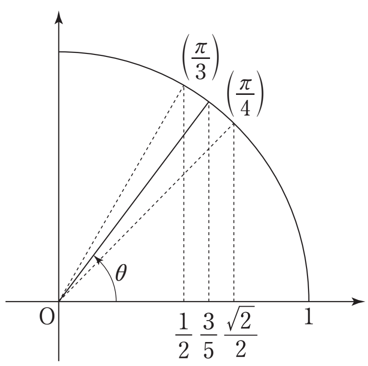
このとき，

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}<\cos\theta=\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

であるから，θ は，

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{3} \quad (\cdots\cdots 3)$$ ……ソ

を満たす。



〔2〕

(1) $t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ ……(＊)

(＊)について，

$(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})^2=9$ より，$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}-2=9$

これより，

$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\underline{\underline{11}}$ ……(＊＊) ……タチ

ここで，$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}$ について，

$(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}})^2=t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}+2$

(＊＊)より，

$(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}})^2=13$

$t>0$ より，$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}>0$ なので，

$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{\underline{\underline{13}}}$ ……ツテ

(＊)，(＊＊)より，

$(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})(t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}})=-33$

展開して，

$t-t^{-1}-(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})=-33$

(＊)より，

$t-t^{-1}=\underline{\underline{-36}}$ ……トナニ

(2) $x>0$，$y>0$ のとき，

$$\begin{cases}\log_3(x\sqrt{y})\leqq 5 & \cdots\cdots②\\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq 1 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

において，

$X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y$

とおくと，②の左辺は，

$$\begin{aligned}\log_3(x\sqrt{y})&=\log_3 x+\log_3\sqrt{y}\\&=\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y\\&=X+\frac{1}{2}Y\end{aligned}$$

よって，②は，

$X+\dfrac{1}{2}Y\leqq 5$ つまり，$\underline{\underline{2}}X+Y\leqq\underline{\underline{10}}$ ……④ ……ヌ，ネノ

また，③の左辺は，底の変換公式より，

$$\log_{81}\frac{y}{x^3}=\frac{\log_3\frac{y}{x^3}}{\log_3 81}$$

$$=\frac{\log_3 y-\log_3 x^3}{\log_3 3^4}$$

$$=\frac{\log_3 y-3\log_3 x}{4}$$

$$=\frac{Y-3X}{4}$$

よって，③は，

$$\frac{Y-3X}{4}\leqq 1\quad \text{つまり，}\ 3X-Y\geqq -4\quad \cdots\cdots ⑤$$

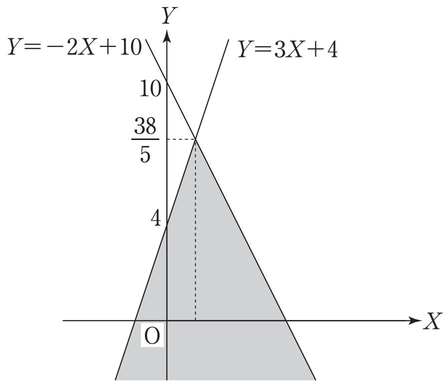
……ハ，ヒフ

④より，$Y\leqq -2X+10$　……④′

⑤より，$Y\leqq 3X+4$　……⑤′

Y のとり得る値の範囲は，右図より，

$$Y\leqq\frac{38}{5}$$



よって，Y のとり得る最大の整数の値は 7

……ヘ

このとき，④，⑤から，

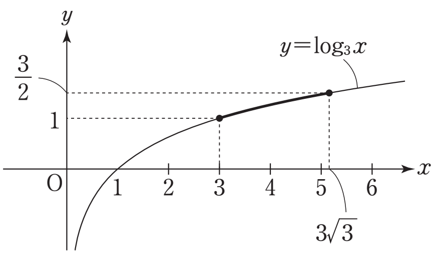
$$\begin{cases}2X+7\leqq 10\\ 3X-7\geqq -4\end{cases}\quad \text{つまり，}\ \begin{cases}X\leqq\dfrac{3}{2}\\ X\geqq 1\end{cases}$$

より，

$$1\leqq X\leqq\frac{3}{2}$$

つまり，

$$1\leqq\log_3 x\leqq\frac{3}{2}\quad \text{より，}\ 3\leqq x\leqq 3\sqrt{3}$$



ここで，$5=\sqrt{25}<\sqrt{27}=3\sqrt{3}<\sqrt{36}=6$

よって，x のとり得る最大の整数の値は 5

……ホ

第 2 問

(1)　l と $C: y=x^2+2x+1$ は点 $(t,\ t^2+2t+1)$ で接し，

$y'=2x+2$　より，l の傾きは $2t+2$ となる。

よって，l の方程式は，

$y=(2t+2)(x-t)+t^2+2t+1$

$=(\underline{\underline{2}}t+\underline{\underline{2}})x-t^2+\underline{\underline{1}}$　……①　　……ア，イ，ウ

また，l と $D: y=f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ は点 $(s,\ f(s))$ でも接し，

$f'(x)=2x-4a+2$　より，l の傾きは $2s-4a+2$ となる。

よって，l の方程式は，

$y=(2s-4a+2)(x-s)+s^2-(4a-2)s+4a^2+1$

$=(\underline{\underline{2}}s-\underline{\underline{4}}a+\underline{\underline{2}})x-s^2+\underline{\underline{4}}a^2+\underline{\underline{1}}$　……②　　……エ，オ，カ，キ，ク

ここで，①と②は同じ直線を表しているので，係数を比較して，

$$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 \end{cases}\quad \text{つまり，}\quad \begin{cases} s-t=2a & \cdots\cdots③ \\ s^2-t^2=4a^2 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

が成り立つ。

③，④より，

$2a(s+t)=4a^2$

よって，$a>0$ より，

$s+t=2a$　……⑤

③，⑤から，

$t=\underline{\underline{0}}$，$s=\underline{\underline{2}}a$　　……ケ，コ

が成り立つ。

したがって，①より，l の方程式は，

$y=\underline{\underline{2}}x+\underline{\underline{1}}$　　……サ，シ

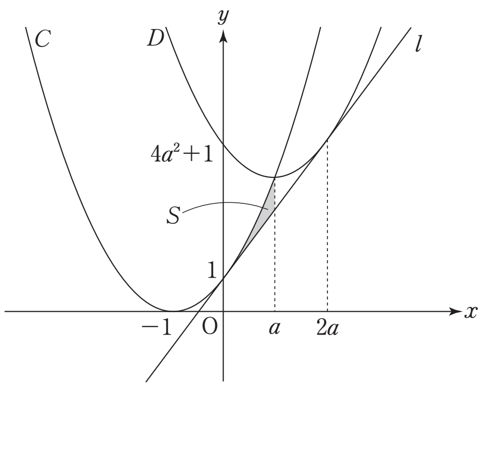
(2)　2 つの放物線 C，D の交点の x 座標は，

$x^2+2x+1=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$

より，$4ax=4a^2$ であり，$a>0$ より，

$x=\underline{\underline{a}}$　　……ス

である。



C と直線 l，および直線 $x=a$ で囲まれた図形は右図の網目部分で，その面積 S は，

$$S=\int_0^a \{x^2+2x+1-(2x+1)\}dx$$

$$=\int_0^a x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{1}{3}a^3$$

よって，

$$S=\frac{a^3}{3}$$ ……セ，ソ

(3)　$a \geqq \frac{1}{2}$ のとき，$2a \geqq 1$ である。

ここで，$a>1$ のとき， ……タ

求める面積 T は，

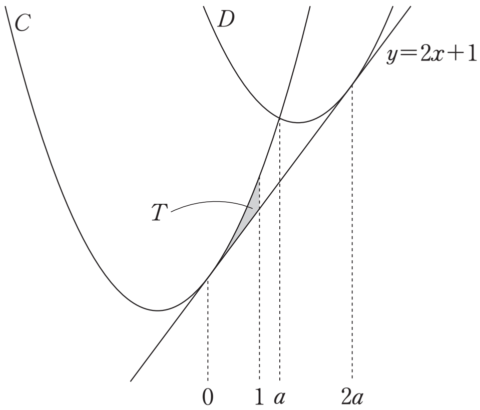
$$T=\int_0^1 \{x^2+2x+1-(2x+1)\}dx$$

$$=\frac{1}{3}$$

よって，a の値によらず，

$$T=\frac{1}{3}$$ ……チ，ツ

$a>1$ のとき

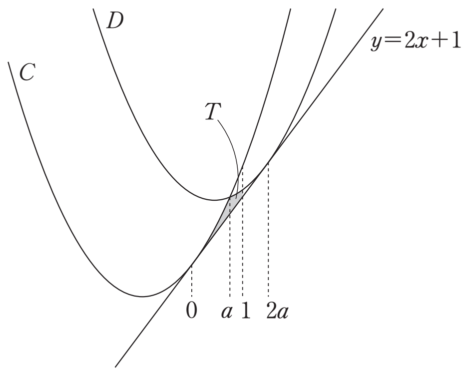


また，$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき，$a \leqq 1 \leqq 2a$ であることから，

$$T=S+\int_a^1 \{f(x)-(2x+1)\}dx \quad \cdots\cdots⑥$$

である。

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき



ここで，

$$\int_a^1 \{f(x)-(2x+1)\}dx$$

$$=\int_a^1 \{x^2-(4a-2)x+4a^2+1-(2x+1)\}dx$$

$$=\int_a^1 (x^2-4ax+4a^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2ax^2+4a^2x\right]_a^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}-2a+4a^2\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-2a^3+4a^3\right)$$

$$=-\frac{7}{3}a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}$$

であるから，⑥に用いて，

$$T=\frac{a^3}{3}+\left(-\frac{7}{3}a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}\right)$$

$$=-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}$$ ……テ，ト，ナ，ニ，ヌ

(4)　$U=2T-3S$ とおくと，$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき，

$$U=2\left(-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}\right)-3\cdot\frac{a^3}{3}$$

$$=-5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}$$

であるから，これを a の関数として，

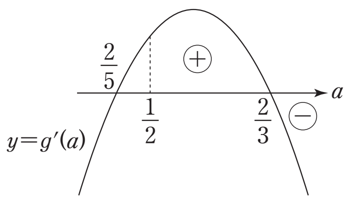
$$g(a)=-5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}\quad\left(\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)$$

とおくと，

$$g'(a)=-15a^2+16a-4$$

$$=-(5a-2)(3a-2)$$

である。したがって，$g(a)$ $\left(\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right)$ の増減は右のようになり，



$a=\underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}$ で，極大 かつ 最大となる。……ネ，ノ

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，最大値は，

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=-5\left(\frac{2}{3}\right)^3+8\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{40}{27}+\frac{32}{9}-2$$

$$=\underline{\underline{\frac{2}{27}}}$$

……ハ，ヒフ

となる。

第 3 問

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$　……①

$n=1$ のとき，$a_1=0$ であるから，

$$a_2=\frac{4}{2}(3a_1+3^2-2\cdot3)=\underline{\underline{6}}\qquad\text{……ア}$$

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおくと，$a_1=0$ より，

$$b_1=\frac{a_1}{3\cdot2\cdot3}=\underline{\underline{0}}\qquad\text{……イ}$$

であり，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}$ であるから，①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}\cdot\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$

$$=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3^{n+1}}$$

よって，$\{b_n\}$ についての漸化式

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{\underline{\underline{(n+1)(n+2)}}}-\left(\frac{1}{\underline{\underline{3}}}\right)^{n+1}\qquad\text{……ウ，エ，オ，カ}$$

を得る。

したがって，

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

と合わせて，

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{\underline{\underline{1}}}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\qquad\text{……キ}$$

が成り立つ。

このことから，$n\geqq2$ で，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\quad\text{……②}$$

が成り立つ。

ここで，$n\geqq2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{\underline{\underline{2}}}\left(\frac{n-1}{\underline{\underline{n+1}}}\right)\qquad\text{……ク，ケ，コ}$$

が成り立つ。また，$n \geqq 2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{\underline{\underline{6}}}-\frac{1}{\underline{\underline{2}}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

……サ，シ，ス，セ

が成り立つ。これと②，および $b_1=0$ より，$n \geqq 2$ のとき，

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

が成り立つが，これは $n=1$ のとき，右辺は 0 となるので，$n=1$ のときも成立する。

したがって，

$$b_n=\frac{3(n-1)-(n+1)}{6(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\frac{n-2}{\underline{\underline{3(n+1)}}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \quad \cdots\cdots③$$

……ソ，タ，チ

(3)　(2)の③と，$a_n=3^n(n+1)(n+2)b_n$ から，$\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=3^n(n+1)(n+2)\left\{\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

$$=\underline{\underline{3}}^{\underline{\underline{n-1}}}(n^2-\underline{\underline{4}})+\underline{\underline{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}} \quad \cdots\cdots④$$

……ツ，テ，ト，ナ，ニ，ヌ

で与えられる。

ここで，すべての自然数 n において，

$3^{n-1}(n^2-4)$ は整数であり，また $(n+1)(n+2)$ は連続する 2 整数の積なので必ず偶数となり，$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ も整数である。

このことより，すべての自然数 n について，a_n は整数となることがわかる。

(4)　n が自然数のとき，a_n を 3 で割ったときの余りは，$3^{n-1}(n^2-4)$ が 3 の倍数であることから，$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ を 3 で割った余りである。

㋐　$n=3k$ のとき

$$\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}=\frac{9k^2+9k+2}{2}=9\cdot\frac{k(k+1)}{2}+1$$

ここで，$k(k+1)$ は連続する 2 整数の積なので，必ず偶数となり，

$$9\cdot\frac{k(k+1)}{2}\ \text{は 9 の倍数}$$

となる。

よって，a_{3k} を 3 で割った余りは $\underline{\underline{1}}$ ……ネ

である。

㋑　$n=3k+1$ のとき

$$\frac{(3k+1+1)(3k+1+2)}{2}=\frac{3(3k+2)(k+1)}{2}$$
$$=\frac{3(k+1)\{k+2(k+1)\}}{2}=3\left\{\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)^2\right\}$$

㋐と同様に $\dfrac{k(k+1)}{2}$ は整数であり，{　　} 内は整数であるから，これは 3 の倍数である。

よって，a_{3k+1} を 3 で割った余りは $\underline{\underline{0}}$ ……ノ

である。

㋒　$n=3k+2$ のとき

$$\frac{(3k+2+1)(3k+2+2)}{2}=\frac{3(k+1)(3k+4)}{2}$$
$$=\frac{3(k+1)\{k+2(k+2)\}}{2}=3\left\{\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)(k+2)\right\}$$

㋑と同様にして，これは 3 の倍数となるから，a_{3k+2} を 3 で割った余りは $\underline{\underline{0}}$ ……ハ

である。

ここで，㋑，㋒は $k=0$ のときも成り立つので，a_n を 3 で割った余りの数列は，

0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ……

となるので，9 項ずつで区切るとき，各和を 3 で割ったときの余りは 0 となる。

$$2020=9\cdot224+4$$

であるから，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}a_k$ を 3 で割った余りは，$a_{2017}+a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}$ を 3 で割った余り

となり，求める余りは，

$0+0+1+0=\underline{\underline{1}}$ ……ヒ

である。

第 4 問

(1)　A(3, 3, -6) より，$\overrightarrow{OA}=3(1,\ 1,\ -2)$ であるから，

$$|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\underline{\underline{3}}\sqrt{\underline{\underline{6}}}$$ ……ア，イ

である。

また，$B(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$ より，$\overrightarrow{OB}=2(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -2)$ であるから，

$$|\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2+(-2)^2}$$

$$=\underline{\underline{4}}\sqrt{\underline{\underline{3}}}$$ ……ウ，エ

である。さらに，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3(1,\ 1,\ -2)\cdot 2(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -2)$$

$$=6\{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})+4\}$$

$$=\underline{\underline{36}}$$ ……オカ

である。

(2)　$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24$ ……①

点 C が平面 α 上，つまり，平面 OAB 上にあるので，実数 s，t を用いて，

$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ ……②

と表すと，①より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ であることから，

$$\overrightarrow{OA}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

よって，

$54s+36t=0$　つまり，$3s+2t=0$ ……③

また，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24$ より，

$$\overrightarrow{OB}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2=24$$

よって，

$36s+48t=24$　つまり，$3s+4t=2$ ……④

③かつ④を解いて，

$$s=\underline{\underline{\frac{-2}{3}}},\quad t=\underline{\underline{1}}$$ ……キク，ケ，コ

を得る。

したがって，

$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ……⑤

であり，

$$|\overrightarrow{OC}|^2=\left|-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2$$

$$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$=24$$

これより，

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{6}$　……サ，シ

(3)　(2)の⑤より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{2}{3}(3,\ 3,\ -6)=(2,\ 2,\ -4)$$ ……ス，セ，ソタ

である。

よって，このことから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから，平面 α 上の四角形 OABC は，台形であることがわかる。

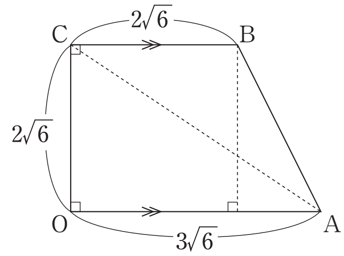
また，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ なので，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\neq|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ となり，これは正方形にも長方形にも，さらには平行四辺形にもなることはない。

以上より，四角形 OABC は平行四辺形ではないが，台形である。(……③)　……チ

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と右図より，四角形 OABC の面積は，

$$\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{2}\cdot 2\sqrt{6}=30$$ ……ツテ

である。



(4)　点 D の z 座標が 1 であることより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(x,\ y,\ 1)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$ より，

$(3,\ 3,\ -6)\cdot(x,\ y,\ 1)=0$　つまり，$3x+3y-6=0$

これより，x，y は，

$x+y=2$　……⑥

を満たす。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{2}{3}\times3(1,\ 1,\ 2)+2(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -2)$$

$$=2\sqrt{3}(1,\ -1,\ 0)$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6}$ より，

$2\sqrt{3}(1,\ -1,\ 0)\cdot(x,\ y,\ 1)=2\sqrt{6}$　つまり，$(1,\ -1,\ 0)\cdot(x,\ y,\ 1)=\sqrt{2}$

これより，x，y は，

$$x-y=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ⑦$$

を満たす。

⑥，⑦を解いて，$x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，点 D の座標は，

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right) \qquad \cdots\cdots ト，ナ，ニ，ヌ，ネ，ノ$$

である。このとき，

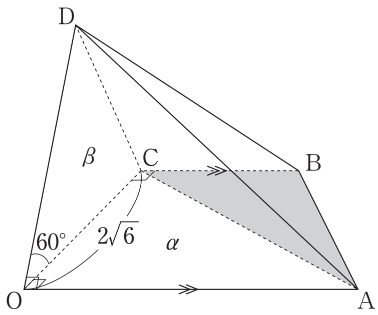
$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2$$
$$=4$$

より，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=2$ である。これと，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{6}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6}$ から，$\angle\mathrm{COD}=\theta$ とおくと，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

となり，$\theta=\angle\mathrm{COD}=60^\circ$ $\qquad\cdots\cdots$ハヒ

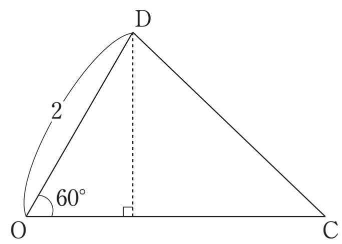
である。



いま，四面体 DABC について，三角形 ABC を底面としたときの，この四面体の高さ h は，平面 α と平面 β が垂直であるから，点 D から直線 OC に下ろした垂線の長さに等しい。

よって，

$$h=2\sin 60^\circ$$
$$=\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots フ$$



したがって，三角形 ABC の面積 S が，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}=12$$

であることから，四面体 DABC の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots へ，ホ$$

である。