解答

与式の両辺に $f(x)$ をかけて,

$$\{f(x)\}^4 - f(x)\{f(y)\}^2 f(z) = f(x)f(y)f(z)\left\{f\left(\frac{y}{x}\right)f\left(\frac{z}{y}\right) - f\left(\frac{x}{z}\right)f\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$$

を得る. さらに, この式で x, y, z を巡回させると

$$\{f(y)\}^4 - f(y)\{f(z)\}^2 f(x) = f(x)f(y)f(z)\left\{f\left(\frac{z}{y}\right)f\left(\frac{x}{z}\right) - f\left(\frac{y}{x}\right)f\left(\frac{z}{y}\right)\right\},$$

$$\{f(z)\}^4 - f(z)\{f(x)\}^2 f(y) = f(x)f(y)f(z)\left\{f\left(\frac{x}{z}\right)f\left(\frac{y}{x}\right) - f\left(\frac{z}{y}\right)f\left(\frac{x}{z}\right)\right\}$$

を得る.

ここで, これらを足し合わせると,

$$\{f(x)\}^4 + \{f(y)\}^4 + \{f(z)\}^4 = f(x)f(y)f(z)(f(x)+f(y)+f(z))$$

となる.

また, f は 0 以上の実数値をとるから相加・相乗平均の不等式より,

$$\{f(x)\}^4 + \{f(x)\}^4 + \{f(y)\}^4 + \{f(z)\}^4 \geqq 4\{f(x)\}^2 f(y)f(z),$$

$$\{f(y)\}^4 + \{f(y)\}^4 + \{f(z)\}^4 + \{f(x)\}^4 \geqq 4\{f(y)\}^2 f(z)f(x),$$

$$\{f(z)\}^4 + \{f(z)\}^4 + \{f(x)\}^4 + \{f(y)\}^4 \geqq 4\{f(z)\}^2 f(x)f(y)$$

となるので両辺足し合わせて

$$\{f(x)\}^4 + \{f(y)\}^4 + \{f(z)\}^4 \geqq f(x)f(y)f(z)(f(x)+f(y)+f(z))$$

を得る. この不等式の等号が常に成立することから, $f(x) = f(y) = f(z)$, すなわち f が定数関数であることがわかる. よって $f(x) = c \quad (c$ は 0 以上の定数) となる. また, このとき条件の式は成立するのでこれが解である.