解答.

$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_8$ 内のどの 2 点を通る直線とも垂直でも平行でもないような直線 l が取れる．l を適切に平行移動することで，l によって分けられる 2 つの領域（境界を含まない）のそれぞれに $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_8$ のうち 4 点ずつがあるとしてよい．

平面全体を回転させることで l が x 軸であるとする．このとき l は $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_8$ 内のどの 2 点を通る直線とも垂直でも平行でもなかったので，$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_8$ の x 座標および y 座標は相異なる．また番号をつけかえて $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ が領域 $\{(x, y) \mid y > 0\}$ に，$\mathrm{P}_5, \mathrm{P}_6, \mathrm{P}_7, \mathrm{P}_8$ が $\{(x, y) \mid y < 0\}$ にあるとしてよい．よって次を示せば問題の主張は示される．

(Q): $\{(x, y) \mid y > 0\}$ の相異なる 4 点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3, \mathrm{Q}_4$ で x 座標および y 座標が相異なるものに対して，扇 F_1, F_2, F_3, F_4 であり，次をみたすものが存在する．

- $i = 1, 2, 3, 4$ に対して扇 F_i の中心は Q_i である．
- F_1, F_2, F_3, F_4 は $\{(x, y) \mid y \leqq 0\}$ を覆う．

実際 $(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3, \mathrm{Q}_4) = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4), (\mathrm{P}_5, \mathrm{P}_6, \mathrm{P}_7, \mathrm{P}_8)$ に対してこの主張および y 座標の符号を逆にした主張を考えることで，問題の条件をみたす 8 個の扇が取れるためである．

主張 (Q) を示す．番号を付け替えることにより $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3, \mathrm{Q}_4$ は x 座標が小さい順になっているとしてよい．さらに必要ならば x 軸方向に平行移動して $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ の x 座標は負，$\mathrm{Q}_3, \mathrm{Q}_4$ の x 座標は正としてよい．このとき次を示せば (Q) は示される．

(R): $\{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ の相異なる 2 点 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ で x 座標および y 座標が異なるものに対して，扇 F_1, F_2 であり，次をみたすものが存在する．

- $i = 1, 2$ に対して扇 F_i の中心は R_i である．
- F_1, F_2 は $\{(x, y) \mid x \leqq 0,\ y \leqq 0\}$ を覆う．

実際 $(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) = (\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2), (\mathrm{Q}_3, \mathrm{Q}_4)$ に対してこの主張および x 座標の符号を逆にした主張を考えることで，(Q) の条件をみたす 4 個の扇が取れるためである．

主張 (R) を示す．$\mathrm{R}_1 = (x_1, y_1),\ \mathrm{R}_2 = (x_2, y_2)$ とおく．番号をつけかえることで $y_1 - x_1 \geqq y_2 - x_2$ としてよい．このとき領域 F_1, F_2 を次のように定める．

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(x_1 + x, y_1 + y) \mid x \leqq 0,\ y - x \leqq 0\} = \{(x, y) \mid x \leqq x_1,\ y - x \leqq y_1 - x_1\}, \\
F_2 &= \{(x_2 + x, y_2 + y) \mid y \leqq 0,\ y - x \geqq 0\} = \{(x, y) \mid y \leqq y_2,\ y - x \geqq y_2 - x_2\}.
\end{aligned}$$

これらはそれぞれ $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ を中心とする扇である．また，$(s, t) \in \{(x, y) \mid x \leqq 0,\ y \leqq 0\}$ が F_1 の元でないとすると，$t - s > y_1 - x_1 \geqq y_2 - x_2$ であり F_2 の元となる．よってこれらは (R) の条件をみたす 2 個の扇である．よって主張 (R) が示されたので，前述の通り主張 (Q) が従い，問題の主張も従う． ■