解答.

$\mathit{\Gamma}$ 上の相異なる $n+1$ 個の点 $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_{n+1}$ および相異なる $n+1$ 個の点 $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_{n+1}$ を，$i=1,\ldots,n$ について $\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_{i+1}, \mathrm{L}_i$ および $\mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_{i+1}, \mathrm{L}_i$ が同一直線上にあり，$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_{n+1}, \mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_{n+1}$ が l に平行でないようなものとする．このとき $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_{n+1}$ と $\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_{n+1}$ が l 上に共有点を持つことを言えばよい．実際，共有点を L_{n+1} とおくと条件を満たす．$\mathrm{X}_1=\mathrm{Y}_1$ のとき条件から帰納的に $\mathrm{X}_2=\mathrm{Y}_2$，$\ldots$，$\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{Y}_{n+1}$ なので，このときは正しい．$\mathrm{X}_1\neq\mathrm{Y}_1$ とする．点の取り方から帰納的に $\mathrm{X}_2\neq\mathrm{Y}_2$，$\ldots$，$\mathrm{X}_{n+1}\neq\mathrm{Y}_{n+1}$ である．

ここで $\mathit{\Gamma}$ 上の 6 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ に対し，$P(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}; \mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}')$ により，AB' と $\mathrm{A}'\mathrm{B}$, BC' と $\mathrm{B}'\mathrm{C}$, CA' と $\mathrm{C}'\mathrm{A}$ の交点が同一直線上にあるという主張を表す．パスカルの定理からこの主張は正しい．

n に関する帰納法で示す．$n=1$ のときは L_1 が共有点となる．n に対して満たされているとして $n+2$ に対して示す．帰納法の仮定から $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_{n+1}$ と $\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_{n+1}$ は l 上で交わり，また，$\mathrm{X}_{n+1}\mathrm{X}_{n+2}$ と $\mathrm{Y}_{n+1}\mathrm{Y}_{n+2}$ は l 上の点 L_{n+1} で交わるので，$P(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_{n+1}, \mathrm{X}_{n+2}; \mathrm{Y}_1, \mathrm{X}_{n+1}, \mathrm{Y}_{n+2})$ から $\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_{n+2}$ と $\mathrm{Y}_1\mathrm{X}_{n+2}$ も l 上で交わる．さらに $\mathrm{X}_{n+2}\mathrm{X}_{n+3}$ と $\mathrm{Y}_{n+2}\mathrm{Y}_{n+3}$ は l 上の点 L_{n+2} で交わるので，$P(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_{n+2}, \mathrm{Y}_{n+3}; \mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_{n+2}, \mathrm{X}_{n+3})$ から $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_{n+3}$ と $\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_{n+3}$ も l 上で交わる．よって示された． ■