数学コンクール6月号　解答

　$2n$ 個のボールを①〜$\textcircled{2n}$とする．2つの箱 A, B に，$2n$ 個のボールを n 個ずつに分けて入れる試行を3回行う．$x_{(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{A})}$ で1回目，2回目，3回目共に A に入ったボールの個数を表す．他も同様とする．

$$x_{(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{A})}+x_{(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{B})}+x_{(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{A})}+x_{(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{B})}=n$$

$$x_{(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{A})}+x_{(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{B})}+x_{(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{A})}+x_{(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{B})}=n$$

であるから

$$x_{(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{A})}-x_{(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{B})}=x_{(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{A})}-x_{(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{B})}$$

が成り立つ．ここでこの差を k とし，$x_{(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{B})}=a$，$x_{(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{B})}=b$ とおくと，$x_{(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{A})}=a+k$，$x_{(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{A})}=b+k$ となる．同様に

$x_{(\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{A})}=c$，$x_{(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{A})}=d$ とおくと，$x_{(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{B})}=c+k$，$x_{(\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{B})}=d+k$

となるから，

$$\sum_{(a,b,c,d,k)\in S}\frac{(2n)!}{a!b!c!d!(a+k)!(b+k)!(c+k)!(d+k)!}=\left({}_{2n}\mathrm{C}_n\right)^3$$

が成立する．ゆえに

$$\sum_{(a,b,c,d,k)\in S}\frac{1}{a!b!c!d!(a+k)!(b+k)!(c+k)!(d+k)!}=\left(\frac{(2n)!}{n!n!n!}\right)^2$$

である．