数学コンクール７月号　解答

$$F\left(2x^2,2y^2\right)=F\left(\left(x+y\right)^2,\left(x-y\right)^2\right)\qquad\cdots\cdots(*)$$

が成立することから, $F\left(x,y\right)$は対称式であり,

$$F\left(x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}f_k\left(x+y\right)\left(xy\right)^k$$

という形で表される$\left(f_k\left(x\right)\right.$は整式である$\left.\right)$.

$(*)$より,

$$\begin{aligned}F\left(2x^2,2y^2\right)&=\frac{1}{2}\left\{F\left(2x^2,2y^2\right)+F\left(\left(x+y\right)^2,\left(x-y\right)^2\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}f_k\left(2x^2+2y^2\right)\left\{\left(4x^2y^2\right)^k+\left\{\left(x^2-y^2\right)^2\right\}^k\right\}\end{aligned}$$

である．ここで, $\left(4x^2y^2\right)^k+\left\{\left(x^2-y^2\right)^2\right\}^k$ は $4x^2y^2$ と$\left(x^2-y^2\right)^2$ の対称式であるから, $\left(x^2+y^2\right)^2$ と $4x^2y^2\left(x^2-y^2\right)^2$ による整式で表すことができる．ゆえに,

$$F\left(2x^2,2y^2\right)=G\left(2x^2+2y^2,\left(2x^2\right)\left(2y^2\right)\left(2x^2-2y^2\right)^2\right)$$

を満たす多項式 $G\left(x,y\right)$が存在する．すなわち, $F\left(x,y\right)$は $x+y$ と $xy\left(x-y\right)^2$ によりできる整式である．逆に,このような任意の整式は$(*)$を満たす.