解答.

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ であり, 各整数の組 (a,b) に対し, a, b の偶奇が同じなら $x-y=a$ かつ $x+y=b$ をみたす整数 x, y の組がちょうど 1 つ存在し, a, b の偶奇が異なればそのような整数 x, y の組は存在しない. よって,

$$f(n)=4\sum_{ab\leqq n,a,b\ \text{は正の奇数}}1$$
$$g(n)=4\sum_{ab\leqq n,a,b\ \text{は正の偶数}}1$$

である. ここで,

$$h_1(n)=4\sum_{ab\leqq n,a\ \text{は正の奇数},b\ \text{は正の偶数}}1$$
$$h_2(n)=4\sum_{ab\leqq n,a\ \text{は正の偶数},b\ \text{は正の奇数}}1$$

とおくと, 対称性より $h_1(n)=h_2(n)$ だから,

$$\begin{aligned}f(n)-g(n)&=f(n)-g(n)+h_1(n)-h_2(n)\\&=4\sum_{ab\leqq n,a,b>0}(-1)^{a-1}\\&=4\sum_{a=1}^{n}(-1)^{a-1}\left[\frac{n}{a}\right]\end{aligned}$$

である.

$$\sum_{a=1}^{[\sqrt{n}]}(-1)^{a-1}\frac{n}{a}=n\int_0^1\frac{1-(-x)^{[\sqrt{n}]}}{1+x}dx$$

であり,

$$\left|\int_0^1\frac{(-x)^{[\sqrt{n}]}}{1+x}dx\right|\leqq\int_0^1x^{[\sqrt{n}]}dx=\frac{1}{[\sqrt{n}]+1}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

であるから,

$$\left|\left(\sum_{a=1}^{[\sqrt{n}]}(-1)^{a-1}\left[\frac{n}{a}\right]\right)-(\log 2)n\right|<2\sqrt{n}$$

である. さらに, 正の整数 a に対し $\left[\frac{n}{a}\right]-\left[\frac{n}{a+1}\right]\geqq 0$ だから,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{a=[\sqrt{n}]+1}^{n}(-1)^{a-1}\left[\frac{n}{a}\right]\right|&\leqq\sum_{a\geqq[\sqrt{n}]+1}\left(\left[\frac{n}{a}\right]-\left[\frac{n}{a+1}\right]\right)\\&=\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]+1}\right]<\sqrt{n}\end{aligned}$$

である. 以上より $|f(n)-g(n)-(4\log 2)n|<12\sqrt{n}$ が従う.