解答.

$(f(x)^2)' = 2f(x)f'(x)$ であるから,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)^2dx + \int_0^1 f'(x)^2dx \\
&= \int_0^1 (f'(x) - f(x))^2dx + 2\int_0^1 f(x)f'(x)dx \\
&= \int_0^1 (f'(x) - f(x))^2dx + [f(x)^2]_0^1 \\
&= \int_0^1 (f'(x) - f(x))^2dx + 1
\end{aligned}
$$

である. ここで次の補題を示す.

補題. $[0,1]$ 上定義された実数値連続関数 f_1, f_2 に対し,

$$
\left(\int_0^1 f_1(x)^2dx\right)\left(\int_0^1 f_2(x)^2dx\right) \geqq \left(\int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx\right)^2
$$

が成り立つ.

証明. $f_2(x) = 0$ のとき, 両辺 0 なので成り立つ. そうでないとき,

$$
\int_0^1 f_2(x)^2dx > 0
$$

である.

$$
p(t) = \int_0^1 (f_1(x) - tf_2(x))^2dx
$$

とおくと,

$$
p(t) = \left(\int_0^1 f_2(x)^2dx\right)t^2 - 2\left(\int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx\right)t + \left(\int_0^1 f_1(x)^2dx\right)
$$

であり, 任意の実数 t に対し $p(t) \geqq 0$ である. よって t の 2 次方程式 $p(t) = 0$ の判別式が 0 以下であることから補題が従う. (補題の証明終)

$g(x) = e^{-x}f(x)$ とおくと, $f'(x) - f(x) = e^xg'(x)$ である. 補題より,

$$
\left(\int_0^1 e^{2x}g'(x)^2dx\right)\left(\int_0^1 e^{-2x}dx\right) \geqq \left(\int_0^1 g'(x)dx\right)^2 = (g(1) - g(0))^2 = e^{-2}
$$

であるから,

$$
\int_0^1 (f'(x) - f(x))^2dx \geqq \frac{e^{-2}}{\frac{1}{2}(1 - e^{-2})} = \frac{2}{e^2 - 1}
$$

である. 以上より,

$$
\int_0^1 f(x)^2dx + \int_0^1 f'(x)^2dx \geqq \frac{2}{e^2 - 1} + 1 = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}
$$

である.

$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}$ のとき, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ であり,

$$f'(x) - f(x) = \frac{2e^{-x}}{e - e^{-1}}$$

なので,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)^2 dx + \int_0^1 f'(x)^2 dx &= \int_0^1 \left(\frac{2e^{-x}}{e - e^{-1}}\right)^2 dx + 1 \\ &= 1 + \frac{4}{(e - e^{-1})^2} \cdot \frac{1 - e^{-2}}{2} \\ &= \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}\end{aligned}$$

である. よって, 求める最小値は $\dfrac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$ である.