解答.

題意を満たす f が存在することを示す．$g(x) = x^2 - 2$ とおく．$\mathbb{Q}$ で有理数全体の集合を表し, $\pm g(\mathbb{Q})$ で, 有理数 a を用いて $g(a)$ または $-g(a)$ と表せる有理数全体の集合を表す．また $\pm\sqrt{4 - g(\mathbb{Q})^2}$ で, 有理数 a を用いて $\sqrt{4 - g(a)^2}$ または $-\sqrt{4 - g(a)^2}$ と表せる有理数全体の集合を表す.

補題 1. 有理数 a が, ある整数 $n > m \geqq 0$ に対して $g^n(a) = g^m(a)$ をみたすならば, $a = 0, \pm 1, \pm 2$ のいずれかである.

証明. $g^n(x) - g^m(x)$ は最高次の係数が 1 の整数係数多項式なので, その根は有理数ならば整数である．よって a は整数である．また, $|x| > 2$ のとき $g(x) > |x|$ だから, $|a| > 2$ と仮定すると $a, g(a), g^2(a), \ldots$ は狭義単調増加列となり矛盾である. (補題の証明終)

補題 2. 有理数 a は $0, \pm 1, \pm 2$ と異なるとする．$\sqrt{4 - a^2}$ が有理数でないならば, $n > 0$ に対しても $\sqrt{4 - g^n(a)^2}$ は有理数でない.

証明. $|a| > 2$ ならば $|g^n(a)| > 2$ だからよい．$|a| < 2$ のとき, $a = 2\cos\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ とおける．$g(2\cos\theta) = 2\cos 2\theta$ なので $g^n(a) = 2\cos 2^n\theta$ である．よって $\cos\theta$, $\sin 2^n\theta$ が有理数のとき $\sin\theta$ も有理数であることをいえばよいが, これは 2 倍角の公式より

$$\frac{\sin 2^n\theta}{\sin\theta} = 2^n \cos\theta\cos 2\theta \cdots \cos 2^{n-1}\theta$$

であることと, 2 倍角の公式より正の整数 k に対し $\cos 2^k\theta$ が有理数であることから従う. (補題の証明終)

補題 3. 有理数 a, b は $0, \pm 1, \pm 2$ と異なるとする．$a^2 + b^2 = 4$ であるとする．このとき正の整数 n に対し, $\sqrt{4 - g^n(a)^2}$ は有理数であり, $g(t) = \pm\sqrt{4 - g^n(a)^2}$ をみたす有理数 t は存在しない.

証明. 前半は $\cos\theta$, $\sin\theta$ が有理数のとき $\sin 2^n\theta$ も有理数だからよい．後半は, $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\alpha \neq 0$ が有理数のとき $\pm\sin 2^n\theta = \cos 2\alpha$ となりえないことを示せばよい．$\pm\sin 2^n\theta = \cos 2\alpha$ と仮定すると, $2^n\theta = \dfrac{\pi}{2} \pm 2\alpha + m\pi$ をみたす整数 m が存在する．このとき $2^{n-1}\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{m\pi}{2} \pm \alpha$ より,

$$\sin 2^{n-1}\theta = \pm\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + \cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right)$$
$$\cos 2^{n-1}\theta = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) \mp \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right)$$

がともに有理数となる． よって $\cos 2^{n-1}\theta + \sin 2^{n-1}\theta$ または $\cos 2^{n-1}\theta - \sin 2^{n-1}\theta$ を考えることで $\sqrt{2}\cos\alpha$ が有理数であることがわかり, 矛盾を得る. (補題の証明終)

補題 4. 有理数 a, b は $0, \pm 1, \pm 2$ と異なり, また $\pm g(\mathbb{Q})$, $\pm\sqrt{4 - g(\mathbb{Q})^2}$ の元でないとする．ある 0 以上の整数 n, m について $g^n(a) = g^m(b)$ が成り立つならば, $b = \pm a$ または $a^2 + b^2 = 4$ である.

証明. $g^n(a) = g^m(b)$ をみたす m を最小にとる．$m = 0$ なら $a = b$ である.

$m>0$ なら $n>0$ で $g^{n-1}(a)=-g^{m-1}(b)$ である．$m-1=0$ なら $b=-a$ である．$m-1>0$ なら $n-1>0$ で，$g^{n-2}(a)=\pm\sqrt{4-g^{m-2}(b)^2}$ である．$m-2=0$ なら $a^2+b^2=4$ である．$m-2>0$ なら $n-2>0$ だが，このとき $\sqrt{4-g^{m-2}(b)^2}$ が有理数なので，補題 2 より $\sqrt{4-g^{m-3}(b)^2}$ も有理数だから，補題 3 を，a を $g^{m-3}(b)$ として用いると矛盾を得る．(補題の証明終)

補題 5．有理数 t は $0,\pm1,\pm2$ と異なるとする．このときある非負整数 n と，$\pm g(\mathbb{Q})$，$\pm\sqrt{4-g(\mathbb{Q})^2}$ の元でない有理数 a が存在して，$t=\pm g^n(a)$ または $t=\pm\sqrt{4-g^n(a)^2}$ と表せる．

証明． 有理数の無限列 $t_1,t_2,\ldots$ で，$t_1=t$，任意の正の整数 k に対し $t_k=\pm g(t_{k+1})$ または $t_k=\pm\sqrt{4-g(t_{k+1})^2}$ であるものが存在すると仮定して矛盾を導けばよい．まず t が整数であるとすると，t_k はすべて整数でなくてはならず，$|t|>2$ なので帰納的に $|t_k|>|t_{k+1}|>2$ がわかるから矛盾である．t が整数でないとする．$t_k=\dfrac{r_k}{s_k}$ $(s_k>0)$ と既約分数の形に表すと，$s_1>1$，$s_{k+1}^2=s_k$ であるから矛盾である．(補題の証明終)

以下，条件をみたす関数 f を構成する．まず $f(0)=1$，$f(1)=-2$，$f(-2)=-1$，$f(-1)=2$，$f(2)=-1$ と定めると，$x=0,\pm1,\pm2$ に対しては条件をみたす．$\mathbb{Q}\setminus\{0,\pm1,\pm2\}$ の元 x のうち $\sqrt{4-x^2}$ が有理数でないものを $a_1,a_2,\ldots$ と添え字付けし，残りを $b_1,b_2,\ldots$ と添え字付けする．$A=\{a_1,a_2,\ldots\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots\}$ とおく．

無限列 $x_1,x_2,\ldots\in A$ を帰納的に定める．まず $x_1\in A$ を $\pm g(\mathbb{Q})$ の元でないものの中で添え字が最小のものと定める．$x_1,\ldots,x_{k-1}$ が定まっているとき，$x_k\in A$ を，$\pm x_1,\ldots,\pm x_{k-1}$ のいずれとも異なり，$\pm g(\mathbb{Q})$ の元でないものの中で添え字が最小のものと定める．A の元で $\pm g(\mathbb{Q})$ の元でないものは無限個ある (整数 m を用いて m^2-2 の形に表せない 3 以上の整数など) ので，このように無限列をとることができる．このとき補題 1, 4 より $\pm g^n(x_k)$ たちは相異なり，補題 3, 5 より $\{\pm g^n(x_k)\mid k=1,2,\ldots,n=0,1,\ldots\}=A$ である．

無限列 $y_1,y_2,\ldots\in B$ を帰納的に定める．まず $y_1\in B$ を $\pm g(\mathbb{Q})$，$\pm\sqrt{4-g(\mathbb{Q})^2}$ の元でないものの中で添え字が最小のものと定める．$y_1,\ldots,y_{k-1}$ が定まっているとき，$y_k\in B$ を，$\pm y_1,\ldots,\pm y_{k-1},\pm\sqrt{4-y_1^2},\ldots,\pm\sqrt{4-y_{k-1}^2}$ のいずれとも異なり，$\pm g(\mathbb{Q})$，$\pm\sqrt{4-g(\mathbb{Q})^2}$ の元でないものの中で添え字が最小のものと定める．B の元で $\pm g(\mathbb{Q})$，$\pm\sqrt{4-g(\mathbb{Q})^2}$ の元でないものは無限個ある (正の偶数 m に対し，既約分数 $\dfrac{4m}{m^2+1}$ など) ので，このように無限列をとることができる．このとき補題 1, 4 より $\pm g^n(y_k),\pm\sqrt{4-g^n(y_k)^2}$ たちは相異なり，補題 2, 5 より $\{\pm g^n(y_k),\pm\sqrt{4-g^n(y_k)^2}\mid k=1,2,\ldots,n=0,1,\ldots\}=B$ である．

$i=1,2,\ldots,n=0,1,\ldots$ に対し，$f(\pm g^n(x_{2i-1}))=\pm g^n(x_{2i})$，$f(\pm g^n(x_{2i}))=g^{n+1}(x_{2i-1})$，$f(\pm g^n(y_{2i-1}))=\pm g^n(y_{2i})$，$f(\pm g^n(y_{2i}))=g^{n+1}(y_{2i-1})$，$f(\pm\sqrt{4-g^n(y_{2i-1})^2})=\sqrt{4-g^n(y_{2i})^2}$，$f(\pm\sqrt{4-g^n(y_{2i})^2})=-g^{n+1}(y_{2i-1})$ と定めれば f は $\mathbb{Q}\setminus\{0,\pm1,\pm2\}=A\cup B$ 上でも条件をみたす．