

[解答例]

まず、300 個の実数は、あらかじめ適当に実数倍をしておいても、また適当な定数を加えておいても良いことに注意してほしい。このことから、300 個の実数がすべて整数であると仮定しても良いことに帰結する(その理由を考えることは課題とする)。あとは以下の事実を示せば十分である。

「 $2^n + 1$  個 ( $n \geq 1$ ) の任意の異なる整数から、適当に  $n + 2$  個選んで集合  $S$  を定めることで任意の整数  $k$  ( $1 \leq k \leq n + 2$ ) に対し、 $S$  の中のどの  $k$  個の和の値も、それぞれ異なるようにできる」……(\*)

$n = 8$  のとき  $2^8 + 1 = 257 \leq 300$  であるから、 $k = 5$  において今回の問題の結果が従うことになる。

[*proof of* (\*)]

$n$  に関する *Induction* で示す。  $n = 1$  のときは自明である。一般に与えられた  $2^n + 1$  個の整数の集合を  $U$  とする。  $U$  に対し、  $U$  の元がすべての偶数なら  $U$  の元をすべて  $\frac{1}{2}$  倍する。またすべて奇数ならば  $U$  の元のすべてに  $1$  を加えてから  $\frac{1}{2}$  倍する。この操作をくり返すと  $1$  以外の元は小さくなるので、初めに述べた注意により、  $U$  の元には偶数であるものと奇数であるものが存在していると仮定してよいことになる。さらに偶数の元が過半数であるとして良い。そこで  $U$  の中から偶数の元を任意に  $2^{n-1} + 1$  個選びその集合を  $V$  とすると、この *Induction* の仮定により、  $V$  の中から主張する  $n + 1$  個の整数を選ぶことができる。そして、そこに  $U$  の任意の奇数の元を  $1$  つ加えたもので  $n$  個の整数の組を定めれば、(\*)の主張を満たすものになる。 [Q.E.D]