[解答例]

$$「0 \leqq \frac{d(\mathrm{A},\mathrm{B})-d(\mathrm{C},\mathrm{D})}{d(\mathrm{A},\mathrm{B})}<r」 \iff 「1-r<\frac{d(\mathrm{C},\mathrm{D})}{d(\mathrm{A},\mathrm{B})}\leqq 1」 \cdots\cdots(*)$$

である. $r=\dfrac{1}{n-1}\ (n\geqq 3)$ のとき $(*)$ を満たす $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ の組が存在することを示そう. そこで, 逆に存在しないと仮定する. このとき, 距離が最大になる 2 点を $\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_{n-1}$ とし, 他のものは $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\cdots\cdots,\mathrm{P}_{n-2}$ とする.

また, $d(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_{n-1})=1$ とする. ここで $2(n-2)$ 本の線分の長さ $d(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_k)$, $d(\mathrm{P}_{n-1},\mathrm{P}_k)$ $(k=1,2,\cdots\cdots,n-2)$ を考えて,
これを長い順に $d_1,d_2,\cdots\cdots,d_{2n-4}$ とすると, 仮定したことにより,

$$d_k \leqq \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^k d(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_{n-1})=\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^k$$

が成立する. 一方,

$$1=d(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_{n-1})\leqq d(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_k)+d(\mathrm{P}_{n-1},\mathrm{P}_k)$$

が成立することから,

$$\begin{aligned} n-2 &\leqq \sum_{k=1}^{n-2}\left\{d(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_k)+d(\mathrm{P}_{n-1},\mathrm{P}_k)\right\} \\ &\leqq \sum_{k=1}^{2n-4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^k \\ &=(n-2)\left\{1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{2n-4}\right\} \\ &<n-2 \end{aligned}$$

となって, 矛盾が起こる.

ゆえに, $f(n)=\dfrac{1}{n-1}$ で問題の主張が成立する.

コメント

$f(n)$ はその他にも色々な関数のがあり得る. $\dfrac{d(\mathrm{A},\mathrm{B})-d(\mathrm{C},\mathrm{D})}{d(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ の最小値をどれ位正確に評価させるかによって, 解答の質が変化する.

おそらく数学的見地からすれば, 評価が良い方が望ましいが, その分解答は難しくなるであろう. 今回の解答例は, 比較的ゆるやかな評価にしてあるが, ゆえにもっと良い解答が望まれる.