〔解答例〕

$b_1, b_2, \cdots\cdots b_n$ は異なる素数であるとして考えてよい． また，問題の仮定を満たすような 2 つの組 $(x, y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ と $(x', y_1', y_2', \cdots\cdots, y_n')$ があるとき，x と x' は互いに素であるとしてよい．
$S=\{b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\}$ とすると， $\mathrm{GCD}(a^x-1, a^{x'}-1)=a-1$ であるから，$a-1$ の素因数の集合は S である． そして $a \geqq 3$ である．$z>1$ である整数 z に対し， a^z-1 の素因数の集合が S であるとき，z の任意の素因数 p に対し，$y=\mathrm{GCD}(a-1, a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots\cdots+1)$ とおくと，$a \equiv 1 \pmod{y}$，
$a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots\cdots+1 \equiv p \pmod{y}$ であるから $y=1$ *or* p であるが，$y \neq 1$ なので， $y=p$ となる．
すると，$p \in S$ であり，ゆえに，$a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots\cdots+1$ は p の巾である．ここで p が奇数であると仮定すると，$a \equiv 1 \pmod{p}$ であることから，$p^2 \nmid a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots\cdots+1$ となるが，
$a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots\cdots+1=p$ は $a \geqq 3$ だから成立しない．ゆえに $p=2$ であって，z は 2 の巾である．
ゆえに $0<x<x'$ とすると，$\mathrm{GCD}(x, x')=1$ だから，$x=1, x'=2^l$ $(l \geqq 1)$ とおける．
また，$a+1=2^t$ $(t \geqq 2)$ とおける． このとき $a^x-1=a-1=2(2^{t-1}-1)$ である．また，$l \geqq 2$ であると仮定すると，$a^2+1=(2^t-1)^2+1$ は $a^{x'}-1$ の因数である．すると，$2^{t-1}-1$ の任意の素因数 q に対して，$a^2+1 \equiv 2 \pmod{q}$ となるが，$q \neq 2$ であるから，仮定に矛盾する.ゆえに $l=1$ であって，このとき $t=2$ となる．したがって， $a=3$，かつ $n=1$ であって，$b_1=2$ である．