〔解答例〕

$a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_n}{n}$ から,

$$(n+2)\frac{a_{n+2}}{n+2}=(n+1)\frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{a_n}{n}$$

$$(n+2)\left(\frac{a_{n+2}}{n+2}-\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)=-\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}\right)$$

となるので, $a_1=1$ であることにより,

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(a_2-2)$$

$$a_n=n\left\{1+(a_2-2)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right\}$$

を得る. $\{a_n\}$ が収束するとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1+(a_2-2)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right\}=0$$

であることが必要である. また $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{e}$ であるから, $a_2=2-e$

となる. 実際 $a_2=2-e$ のとき,

$$\begin{aligned}0\leqq|a_n|&=en\left|\frac{1}{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right|\\&=en\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right|\\&\leqq en\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\\&=en\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots\right\}\\&\leqq en\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\cdots\right\}\\&=en\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}\ \to\ 0\ \ (n\to\infty)\end{aligned}$$

である. ゆえに, $a_2=2-e$ のとき $\{a_n\}$ は収束する. ■