

7月号

[解説]

今回の問題には、応募者の数こそ少なかったのですが、それでも優秀な答案がありました。この問題の場合、正解した人は皆、答が「 ${}_{2n-1}C_n$ 」であることを発見して、その後何らかの方法で説明していました。すなわち、恒等式

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{n+k-2}{n-k+1} C_{k-1}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1}} = {}_{2n-1}C_n$$

が成立することを示すことになる訳です。これは分母を払うと
例えば

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+k-2}{n-k+1} C_{k-1} = {}_{2n-1}C_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1}$$

となりますが、両辺が共に項の和の形をしているため、考え易くはありません。しかしながら最優秀答案になった解答では、その証明を技巧的に上手に行っていました。ここでは、あくまでも自然に考えることにより到達することが出来る答案例を紹介します。

$$\frac{1}{{}_{2n-1}C_n} \sum_{k=1}^n \frac{n+k-2}{n-k+1} C_{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と変形し、これを示す方法ですが、説明には **Induction** を用います。そして証明の **Point** は①の形にしておくと右辺の形の階差がシンプルになるところです。

解答

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1}, \quad b_n = \frac{1}{{}_{2n-1}C_n} \sum_{k=1}^n \frac{n+k-2}{n-k+1} C_{k-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots\dots)$$

とおく。まず $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ であることはすぐに分かる。次に

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k-1} \\ &= \frac{1}{2n(2n+1)} \end{aligned}$$

であることがわかるので、後は

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)} \quad (n=2, 3, \dots\dots)$$

であることを示せば十分である。そこで実際には、

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= \frac{1}{2n-1} \mathbf{C}_n \sum_{k=1}^n \frac{n+k-2}{n-k+1} \mathbf{C}_{k-1} - \frac{1}{2n+1} \mathbf{C}_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+k-1}{n-k+2} \mathbf{C}_{k-1} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{2(2n+1)_{n+k-2} \mathbf{C}_{k-1} - (n+1)_{n+k} \mathbf{C}_k}{n-k+1} - 1 \right\} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+1}{n} {}_{n+k-2} \mathbf{C}_{k-1} - {}_{n+k-2} \mathbf{C}_k \right) - 1 \right\} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{n} {}_{n+k-1} \mathbf{C}_k - \sum_{k=0}^n {}_{n+k-2} \mathbf{C}_k \right) \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \left(\frac{n+1}{n} {}_{2n-1} \mathbf{C}_{n-1} - {}_{2n-1} \mathbf{C}_n \right) \\
&= \frac{1}{2n(2n+1)}
\end{aligned}$$

となる。ここで最後の3行目から2行目に至る変形では、2項係数の和の恒等式

$\sum_{k=0}^m {}_{n+k} \mathbf{C}_k = {}_{n+m+1} \mathbf{C}_m$ を用いた。これはパスカルの三角形を見ればすぐに理解できる。

■