解説

問題の仮定を満たす n が無限個存在するような 2019 個の素数の集合 S が存在すると仮定する．初めに S の元として 2 を加えておく．${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}n(n-1)$ であるから，n 及び $n-1$ の素因数も S の元である．ここで $A=1$，$B=n-1$，$C=n$ とすると $A+B=C$ であり，A，B，C の素因数は S の元である．ここで次の補題を用いる．

<u>補題</u>
A，B，C は互いに素な正の整数であって，$A+B=C$ であるとする．また，ABC の異なる素因数の積を D とする．このとき，$C>D^2$ をみたすような A，B，C の組は有限個である．

この補題により，$C\leqq D^2$ の下で A，B，C の組を考えればよいが，D は今高々S の 2019 個または 2020 個の素数の積であるから，C の大きさは有限になる．ゆえに $A+B=C$ をみたす A，B，C の組の数も有限であって矛盾する．したがって，問題の仮定を満たすような S は存在しない．■

<u>Comment</u>
この有名な補題は，望月氏によりその研究論文が発表されている「ABC 予想(の幾分弱いヴァージョン)」である．今回はこの補題を用いずに解く答案が現れなかった．ゆえに今後この補題を使わない解答が本当に望まれる．というのも，「ABC 予想」の解決は全世界ではどうも未だ認められている訳ではないようであって，グレーゾーンがあるとする人もいるからである．