解説

今回の問題は，適度な難しさであったため，答案を送って下さった人は決して多くはなかったが，集まった答案についてはそれぞれ独自性があって興味深かった．問題のテーマは有名な「フィボナッチ数」であるが，この数に関してはこれまで実に色々な性質が見つかっている．専門家であるならば，ぶ厚い本が何冊も書けるであろう．そんな中で特に有名になっているものが，たくさんあるのだが，次の性質もそのうちの一つである．

Lemma 1

任意の自然数は，$\{F_2, F_3, F_4, \cdots\cdots\}$の隣り合わないいくつかの項の和として一意に表すことができる．

これを,「自然数のフィボナッチ正表現」と呼ぶことにする．また，$\{F_2, F_3, F_4, \cdots\cdots\}$のところを$\{F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, \cdots\cdots\}$または，$\{F_{-1}, F_{-2}, F_{-3}, F_{-4}, \cdots\cdots\}$に替えて同じようなことを考えることもでき，前者を略して「非負表現」，後者を「負表現」と呼ぶことにする．ここで，0 以上の任意の整数は非負表現をもつが，一意ではない．一方 0 以外の任意の整数は負表現をもち，これは一意である．この 2 つの事実は，いずれも Lemma1 と同じ方法で証明することができる．

今回の答案の中に，以上の 3 つの表現を利用して準備を進めた上で，上手に Induction で考えられていたものがあったので，以下でそれを紹介する．

まず少し準備をしておく．自然数 n の正表現，0 以外の整数 n の負表現をそれぞれ $r_+(n), r_-(n)$で表すことにする．また，一般に隣り合わないフィボナッチ数のいくつかの和$S=\sum_{j=1}^{k} F_{t_j}$ に対し，$\sum_{j=1}^{k} F_{t_j+1}$ を$\varphi(S)$で表すことにする．さらに，0 以上の整数 n の非負表現の集合をR_n^*で表すことにする．

そこで問題を Induction で解くために必要となる，いくつかの補題を用意する．

Lemma 2

正の整数 n に対し，n の正表現に含まれる最小の項をF_mとする．

m が奇数のとき，

$\left|R_n^*\right|=2, \varphi(R_n^*)=\{\varphi(r_+(n)), \varphi(r_+(n))+1\}$，$\varphi(r_+(n))=\varphi(r_+(n-1))+1$である．

m が偶数のとき，

$\left|R_n^*\right|=3$，$\varphi(R_n^*)=\{\varphi(r_+(n))-1, \varphi(r_+(n)), \varphi(r_+(n)+1)\}$，

$\varphi(r_+(n))-1=\varphi(r_+(n-1)+1)$ である．
また，$\varphi(S)=\varphi(R_+(n)+1)$ のとき，S は F_0 を含み，　$\varphi(S)=\varphi(R_+(n))-1$ のとき
S は F_1 を含む．

Lemma 3

0 以外の任意の整数 n の負表現に含まれる項の最小の Index を m とすると，n と F_m の正負は一致する．

Lemma 4

任意の整数 n に対して，　$\varphi(r_-(n-1))=\varphi(r_-(n))$ or ，$\varphi(r_-(n))+1$ である．特に，
$\varphi(r_-(n-1))=\varphi(r_-(n))$ のとき $r_-(n)$ は F_{-1} を含み，$\varphi(r_-(n-1))=\varphi(r_-(n))+1$
のとき $r_-(n)$ は F_{-1} を含まない．

これらの補題は，いずれも基本定理である Lemma1 と同様に，フィボナッチ数の間に成立する和の恒等式に基づいて成立する．

これらの補題を用意した上で，今回の問題の解答を与えることができる．それでは，以下に今回の問題に対する一つの解答例に至る考え方を解説していこう．

まず，N が F 表現をもつとき，

$$「N=\sum_{k=1}^{m}F_{t_k}=\sum_{k=1}^{m}F_{t_k+1}」$$
$$\iff 「N=\sum_{k=1}^{m}F_{t_k},\ \sum_{k=1}^{m}F_{t_k-1}=0」$$

であることに注意する．したがって，N が F 表現をもつとき，$\sum_{k=1}^{m}F_{t_k-1}$ を負表現部分と非負表現部分に分けて，前者を $r_-(-n)$，後者を $s(n)$ と置くことができる．ただし n はある 0 以上の整数である．このとき $-n\leqq 0$ であるから，$n\neq 0$ のとき，($n=0$ のときは $N=1$ である）Lemma 3 により，$r_-(-n)$ に含まれる項の最小の Index を l とすると $F_l<0$ である．ゆえに $F_{l+1}\geqq 0$ となって，$\varphi(r_-(n-1))\geqq 0$ である．一方，$\varphi(s(n))>0$ であることは自明であるから，　$N=\varphi\left(\sum_{k=1}^{m}F_{t_k-1}\right)>0$ であることが必要になる．

次に，N を任意の正の整数とするときに，N は F 表現をもつことを，Induction で示す．

まず，$N=1$ のときは，$1=F_1, F_0=0$ であるから，$N=1$ は F 表現をもつ．また $N=2$ のときは $2=F_{-1}+F_2, F_{-2}+F_1=0$ であるから，$N=2$ は F 表現をもつ．今度は N が F 表現をもつと仮定する．このとき，ある正の整数 n に対し，

$$r_-(-n)+s(n)=0,\ N=\varphi(r_-(-n))+\varphi(s(n))$$

であるとする．そして，Lemma 2 により，

$$\varphi(s(n))=\varphi(r_+(n))-1,\ \varphi(r_+(n)) \text{ or } \varphi(r_+(n))+1$$

である．

Case1　$\varphi(s(n))=\varphi(r_+(n))-1$ の場合

このときは $s(n)$ を $r_+(n)$ に替えれば，

$$N+1=\varphi(r_-(n))+\varphi(r_+(n))$$

となって，$N+1$ の F 表現になる．

Case2　$\varphi(s(n))=\varphi(r_+(n))$ の場合

このときは $s(n)=r_+(n)$ である．そこで $r_-(-n)$ が F_{-1} を含んでいないときは $s(n)$ に F_0 を加えて $\varphi(s(n))=\varphi(r_+(n))+1$ にすることができるので，$N+1$ は F 表現をもつ．また，$r_-(-n)$ が F_{-1} を含むときは，$r_-(-n)$ から F_{-1} を除き $r_-(-n-1)$ にすると，Lemma 4 により，$\varphi(r_-(-n))=\varphi(r_-(-n-1))$ である．また，Lemma 2 により，$s(n)$ の代わりに適当な $s(n+1)$ を考えて，$\varphi(s(n+1))=\varphi(r_+(n))+1$ にすることができる．すると，

$$r_-(-n-1)+s(n+1)=0,\ N+1=\varphi(r_-(n-1))+\varphi(s(n+1))$$

となって $N+1$ の F 表現を得る．

Case3　$\varphi(s(n))=\varphi(r_+(n))+1$ の場合

このときは Lemma 2 により，$s(n)$ には F_0 が含まれている．ゆえに $r_-(-n)$ には F_{-1} は含まれていない．すると Lemma 4 により，$r_-(n-1)=r_-(-n)+1$ である．そして，Lemma 2 により，適当な $s(n+1)$ を考えると，$s(n+1)$ は F_0 は含まずかつ，$\varphi(s(n+1))=\varphi(r_+(n))+1$ となる．ゆえに，

$$r_-(-n-1)+s(n+1)=0,\ N+1=\varphi(r_-(-n-1))+\varphi(s(n+1))$$

となって $N+1$ の F 表現を得る．

これで任意の正の整数は，F 表現をもつことが分かった．そして最後にその一意性を示さなくてはならない．これを示すためには，やはり，一意性も Induction の仮定下に置いて，Lemma 2 と Lemma 4 を使って確認すればよい．

<u>Comment</u>

今回の問題における考え方としては，さらに別のものがあり得る．実際，ここで紹介した方法よりもよりエレガントな解答も存在するし, それを示唆した答案もあった. しかし, ここで紹介した Idea によれば数学的にも完成度の高い解答が作れる.

コンクールの答案の査読は, 数学の論文のそれとは少し異なる. 数学の論文においては, その主張及び方法が正しいかどうかだけが判定基準であるゆえに, 他人でも埋められるような論理の飛躍やささいな間違いがあってもあまり問題にはならない. しかしながらコンクールの答案ではそれは許されない．コンクールの答案は，解答者がすべてを理解しているかどうかが判定基準である．だから少々の説明不足もあってはならない．もし仮に説明を省略すればそれは解かっていないと見なされてもしかたがないのである. 同様のことが大学入試でも考えられる.