2019年10月号　解説

今回は，とても優秀な答案が集まりました．今回の問題はこれまでとは少し変則的に，複数の問題が出題されています．これからの問題にもこうした事があり得ると思いますが，そうした場合はいずれか一方の問題だけでもかまわないので考えてみてもらいたいと言う気持ちでいます．それでは集まった答案の中から出てきた idea を中心にして解説します．

まず，前半の確率の問題ですが，実質としてはこれは幾何の問題でした．そして問題を解くために注目すべきところは，次の Point になってくるようでした．

Lemma 1

1 以上 n 以下の任意の異なる 4 つの値 k_1, k_2, k_3, k_4 に対して，
$S=\{A_{k_1}, A_{k_2}, A_{k_3}, A_{k_4}, B_{k_1}, B_{k_2}, B_{k_3}, B_{k_4}\}$ とするとき，S の中の 4 つの点でできる四面体で O を内部に含むものは 2 つ存在する．

この補題が示されれば，この様な S の組が全部で ${}_nC_4$ 通り存在することから O を内部に含む四面体が全部で $2\,{}_nC_4$ 個あることが分かります．したがって，問題とする確率は，

$$\frac{2\,{}_nC_4}{{}_{2n}C_4}=\frac{(n-2)(n-3)}{2(n-1)(n-3)}$$

であることになります．

ところで Lemma 1 を示す方法についてですが，これは本質的なところは同じであるにせよ話の焦点のしぼり方に色々ともっていき方があるようです．ここではその中の一つを紹介します．まず以下では O を内部に含む四面体のことを鋭角四面体と呼ぶことにします．また直径となる 2 点 A_k と B_k の組をペアと呼びます．一般性を失うことなく，$S=\{A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4\}$ とします．そこで A_1, A_2, B_1, B_2 の 4 点を通る円を C とおき，C の内部分含む円板を D とします．球面は C により 2 つの半球面に分かれますが，一方を上半面，もう一方を下半面とします．そして，A_3 と A_4 は上半面に，B_3 と B_4 は下半面にあるとしても良いでしょう．ところで S の中の 4 点で鋭角四面体をつくるには，4 点にペアが含まれていないことが必要です．すると，$\{A_3, A_4, B_3, B_4\}$ の中からペアにならない 2 点が含まれることになりますが，その組合せは A_3 と B_4 または B_3 と A_4 に限られます．そこで B_3 と A_4 が含まれる場合について考えます．まず線分 B_3A_4 と D との交点を P とします．すると問題の仮定によって P は，線分 A_1B_1 及び A_2B_2 上には存在しません．したがって，A_1 と A_2，A_1 と B_2，B_1 と A_2，B_1 と B_2 の中で P と合わせて

できる三角形がOを内部に含むような組が唯一存在することになり，これはB_3とA_4とで鋭角四面体を作る組になります．一方A_3とB_4に対しても同様ですから補題が示されたことになります．

次に後半の問題について解説します．この問題は考え方の面で前半の確率の問題と関連が見られるために今回は2問をセットにして出題しました．以下ではOを内部に含む四面体の4つの頂点をP_1, P_2, P_3, P_4としてこれらはすべてある単位球面上にあるとします．$\angle P_iOP_j = \theta_{ij}$ （$\theta_{ij} < \pi, 1 \leqq i < j \leqq 4$）とおきます．すると，$S$上で$P_i$と$P_j$を通る大円に含まれる弧$\overset{\frown}{P_iP_j}$の長さが$\theta_{ij}$となります．同様に球面$S$上に，四面体の各辺$P_iP_j$に対応する弧（大円の一部で，長さが短い方）が存在するので，それを$\overset{\frown}{P_iP_j}$で表します．P_i以外の3点からそのような弧が3つ得られますが, それら3つの弧で囲まれる領域のうち面積が小さい方をD_iとします．このときD_iはある半球面に含まれています．次の補題は以後の話の中心的な役割を果たします．

<u>Lemma2</u>

球面S上の4点でできる四面体 $P_1P_2P_3P_4$がその内部に中心Oを含むことと， Oに関するP_1の対称点P_1^*がD_iに含まれることは同値である．

この補題の説明は課題にしておきます．またこの補題を使って前半の確率の問題を考える方法もあります．さて，球面上の弧長（弧は大円の一部）については平面上の線分の長さと同様に適当な条件の下で三角不等式が成立します．これと補題を用いると，

$$\begin{aligned}
&\theta_{12}+\theta_{13}+\theta_{14}+\theta_{23}+\theta_{34}+\theta_{42}\\
&=\overset{\frown}{P_1P_2}+\overset{\frown}{P_1P_3}+\overset{\frown}{P_1P_4}+\overset{\frown}{P_2P_3}+\overset{\frown}{P_3P_4}+\overset{\frown}{P_4P_2}\\
&=(\pi-\overset{\frown}{P_1^*P_2})+(\pi-\overset{\frown}{P_1^*P_3})+(\pi-\overset{\frown}{P_1^*P_4})+\overset{\frown}{P_2P_3}+\overset{\frown}{P_3P_4}+\overset{\frown}{P_4P_2}\\
&=3\pi+(\overset{\frown}{P_2P_3}+\overset{\frown}{P_3P_4}+\overset{\frown}{P_4P_2}-\overset{\frown}{P_1^*P_2}-\overset{\frown}{P_1^*P_3}-\overset{\frown}{P_1^*P_4})\\
&\geqq 3\pi
\end{aligned}$$

であることが示せます．$\theta_{12}+\theta_{13}+\theta_{14}+\theta_{23}+\theta_{34}+\theta_{42}$が十分に$3\pi$に近くなるような$P_1, P_2, P_3, P_4$の配置も容易に見つかりますからこの和の下限は$3\pi$となります．