2019年11月号　解説

今回の問題に対しては, 寄せられた答案が多くはありませんでした. しかし, 内容的には期待した通りのものがありました. このコンクールでは, 毎回難でも手軽に解ける問題を出題してはいません. そのような中であっても, 問題を解決するための, idea の冴えを見せてもらえることを楽しみにしています. それでは今回の優秀な答案内容を紹介します. まず, 次のよく知られた補題を用意します.

Lemma

p を $p \equiv 3 \pmod 4$ である任意の素数とするとき, 2 つの平方数の和 a^2+b^2 が p の倍数であるとき, これは p^2 の倍数である.

この補題の証明は, 背理法で行うことができます. 実際, $p \mid a^2+b^2$ かつ $p^2 \nmid a^2+b^2$ のとき, $p \nmid a$ かつ $p \nmid b$ であるから, $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod p$ であることにより, $k^2 \equiv -1 \pmod p$ である整数 k が存在することになります. しかし, $p=4t+3$ とおけるので $k^{p-1} \equiv k^{4t+2} \equiv -1 \pmod p$ となって, フェルマーの定理に矛盾するのです.

さて, 任意の奇数 N は $N=2m-1$ とおけ, また恒等式

$$(m^2+3)^3+(2m-1)=(m^3+4m-1)^2+(m^2+m+5)^2$$

が成立します. さらに, GCD $(m^3+4m-1,\ m^2+m+5)=1$ です. ゆえに, Lemma によって, $a_{m^2+3}=(m^2+3)^3+(2m-1)$ は $p \equiv 3 \pmod 4$ である素数を因数にもたないことが分かります.