2019年12月号　解説

今回の問題は，幾何の分野からの出題であったが，この分野が得意である人もたくさんいるであろう．今は特にある不等式を示す事が目的であるが，そうであってもあくまでも幾何学的に考える方法が好まれる所が，幾何の問題の特徴である． そして実際それに答えて良い答案が送られて来たので，その idea を中心に解説しよう．

まず，3 点 A_1，B_1，C_1 が一直線上にある時は，比較的問題なく処理する事ができるので，ここでは A_1，B_1，C_1 で三角形がつくれる場合を考える．
このとき 2 つの三角形 $A_1B_1C_1$ と $A_2B_2C_2$ は合同であるから，2 つの三角形を 1 つの三角形 ABC に一致させる代わりに，O を 2 つにして（O_1 と O_2）考えれば十分である．
このとき O_1 と O_2 が共に三角形 ABC の周及び内部に含まれる場合に帰着できることが容易にわかる．

次に不等式の左辺の形を構成するために，三角形 ABC の各辺 BC，CA，AB に関する O_2 の対称点をそれぞれ O_A, O_B, O_C とする．すると，6 個の点 A, O_C, B, O_A, C, O_B を頂点とする六角形（これを P とする．これは凸六角形になるとは限らない）の面積は三角形 ABC の面積（これを S とおく）の 2 倍になる．

次に，この六角形の面積を 6 本の線分 $O_1A, O_1O_C, O_1B, O_1O_A, O_1C, O_1O_B$ で分割して計算する．ただし， 六角形が凸六角形でない場合を考慮して，各線分で六角形を分割してできる，それぞれの三角形は符号（向き）を与えておく必要があるが，それは例えば A，B，C を左回りで考えているとき，三角形 O_1AO_C の面積を表すときの角度 $\angle O_1AO_C$ は右回りを正の角，また三角形 O_1BO_C の面積を表すときの角度 $\angle O_1BO_C$ は左回りを正の角として測ることにすれば良い．このようにして，$\angle O_1AO_C = \alpha_1, \angle O_1BO_C = \beta_2$，
$\angle O_1BO_A = \beta_1, \angle O_1CO_A = \gamma_2, \angle O_1CO_B = \gamma_1, \angle O_1AO_B = \alpha_2$ とすると，六角形の面積を考えて，それを，

$$2S = \frac{1}{2}a_1a_2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) + \frac{1}{2}b_1b_2(\sin\beta_1 + \sin\beta_2) + \frac{1}{2}c_1c_2(\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2)$$

とすることができる．ここで $a_k = O_kA, b_k = O_kB, c_k = O_kC \ (k = 1, 2)$ である．
このとき，三角形 ABC の内角をそれぞれ α, β, γ で表すと $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha, \beta_1 + \beta_2 = 2\beta$，
$\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma$ が成立していることに注意しよう．

そして， $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ であることから，

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a_1a_2}{bc}\frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{2\sin\alpha} + \frac{b_1b_2}{ca}\frac{\sin\beta_1 + \sin\beta_2}{2\sin\beta} + \frac{c_1c_2}{ab}\frac{\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2}{2\sin\gamma} \\ &= \frac{a_1a_2}{bc}\cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{b_1b_2}{ca}\cos\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + \frac{c_1c_2}{ab}\cos\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \end{aligned}$$

を得て，今回の問題のステートメントが示されることになる．