2020年2月号　解説

今回の問題も，難度は高かった．問題の結論を予想すること自体は難しくはなかったのであるが，その証明をきちんと行うことができるかどうかに力量が問われる所である．この問題に寄せられた答案はそれぞれが，そこをうまく行う工夫を考えていたが，どうしても冗長になってしまったり，または細部に欠陥ができてしまっていたりするものがいくつか見受けられた．

今回の問題に対しては，$n=6$のとき，6点のうち5点を正5角形の頂点に置き，もう1点はその中心にすれば，問題で仮定されたステイトメントが満たされるような例が作れる．そこで「$n \geqq 7$のときは，それが不可能である」ことを示すことになるのだが，この部分の証明を独創的な *idea* で考えていた答案の流れを説明しよう．まず初めに問題の仮定を満たすような7個の点の集合が存在すると仮定し，それをSとする．次の補題が基本的な役割を果たす．

<u>Lemma</u>

Sの中のある1点Oを原点とするxy平面上の第1象限に1点$\mathrm{A} \in S$があり，また第3象限に2点$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in S$があるとき，3点$\mathrm{A}, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$はOを中心とするある円上に存在し，かつAOと$\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$に直交する．

この補題は簡単に確認することができる．そしてこの補題により次の事実が成立することがわかる．

<u>Property</u>

Sの中のある1点Oを原点とするxy平面上にある第1象限のSの点の個数をp，第3象限のSの点の個数をqとするとき，$p>0$かつ$q>0$であるならば$p+q \leqq 3$である．

そしてこの事実に注意すると，すっきりと主張を示すことができる．まずSの任意の2点を通るどの直線とも平行にならないように，平面上のx軸とy軸の方向を定める．そしてSの点でx座標またはy座標が最大及び最小とならないような点（少なくとも3点以上ある）の中で，y座標が2番目に大きい点を原点Oとする．こうして定めたxy平面上の第k象限$(k=1, 2, 3, 4)$にあるSの点の個数をp_kとする．このとき，$p_1+p_2 \geqq 2$，$p_2+p_3 \geqq 1$，$p_3+p_4 \geqq 2$，$p_4+p_1 \geqq 1$が成立する．これら不等式は，変換

$(p_1, p_2) \leftrightarrow (p_4, p_3), (p_2, p_3) \leftrightarrow (p_1, p_4)$に関して対称であるから，$p_1$が最大，つまり$p_1 \geqq 2$としてよい．さらに，$p_1$と$p_3$および$p_2$と$p_4$に Lemma を用いて適する組を書き出すと，次の場合があり得る．

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (2, 2, 1, 1), (3, 1, 0, 2), (2, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 3)$$

このうち最後の 2 つは適当な座標変換により最初の 2 つに帰着される．また，$(3, 1, 0, 2)$の場合は Lemma を考えると，座標軸を O を中心に適当に回転させることにより，$(2, 2, 1, 1)$の Case に帰着させることができる．そして$(2, 2, 1, 1)$の場合はまた Lemma を使って考えることにより, O 以外の 6 点が O を中心とするある円周上に存在することを確認することができる．そしてここから最後の矛盾を導くことは容易である．