2020 年 3 月号　解説

今回の問題では，問題で定義された数列の特徴づけをすることが目的でした．集まった答案では，以下の事実が主張されていました．

「a_n は n 以下の $\{b_k\}$ の項数を表し， b_n は n 以下の $\{a_k\}$ の項数を表す．」……(∗)

そして実際(∗)が成立することが予想できれば，これを示すこと自体は難しくないようです．ここでは，最も自然に考えられる方法を一つ紹介しておきます．

まず，0 以上の整数 m に対して

$\{A_0, A_1, \cdots\cdots, A_k\} \cup \{B_0, B_1, \cdots\cdots, B_l\} = \{0, 1, \cdots\cdots, m\}$ であると仮定します．ここで $\{A_0, A_1, \cdots\cdots, A_k\}$ または $\{B_0, B_1, \cdots\cdots, B_l\}$ が $\varnothing$ である場合はほぼ自明だから, そうではないとします．すると， $k+l=m-1$ が成立します．

そこで， $A_k=m$ であるとします．すると， $b_l=B_l-l \leqq (m-1)-l=k$ であり，また，
$b_{l+1}=B_{l+1}-(l+1) \geqq (m+1)-(l+1)=k+1$ であって，さらに，
$a_k=A_k-k=m-k=l+1$ であることになるので(∗)の前半が成立することが分かります. 一方, $B_l=m$ である場合も同様に考えれば, (∗)の後半が成立することも分かります。