

今回の問題は、与えられた漸化式を満たす整数列を構成することが目的です。実はこの問題には自明な整数列が存在しています。それは、この問題にある漸化式の形を見れば分かることですが、 $\{a_n\}$ が等比数列となる場合です。実際に $a_n = ar^{n-1}$ と仮定すると、漸化式により、 $ar \neq 0$ のとき、

$$(n+1)^2 r^2 = f(n)r + 8n^2$$

が成立することから、これは

$$f(n) = \left(r - \frac{8}{r}\right)n^2 + 2rn + r$$

であることと同値になります。 $f(n)$ は2次関数であったから、 r は任意の0以外の整数で、問題の仮定が成立します。問題では $f(n)$ を一つ求めることが要求されていたのですが、今回集まった答案はすべて、この例を挙げていました。しかしながら、今回の問題の出題にあたっては、自明ではない $f(n)$ の存在を考えてほしかったところでした。結局自明ではない $f(n)$ は答案からは見つかってはいなかったのですが、これに関してはこの先の研究に移していきたいと思います。なお、本来であるなら、問題の中でもっと出題の意図をはっきりと述べておくべきであったのかもしれませんが、ここはあえてこの問題を考える人のそれぞれの立場を重視して、答え方を自由にしてしまいました。このコンクールに挑戦しているような人には、分かっていることであるかもしれませんが、数学の問題とは一つの答えを得たときから、それで終わらずに、さらに新しいことへと発達していくものであることをいつも認識させられます。