2020年7月号　解説

今回の問題に対しては，良い解答が寄せられた．以下で，その中の一つについて説明しよう．

問題には 2 つの主張が仮定されていたが，実はそのいずれもが成立しない．これを示すには，与えられた3次関数$g(x)$に対して，$f(f(x))=g(x)$である$f(x)$が存在する場合と存在しない場合があることを確かめれば良い．いずれも色々な$g(x)$が考えられるのだが，まず$g(x)=x^3$とする．この場合は，$f(x)$を

$$f(x)=\begin{cases} x^{\sqrt{3}} & (x \geqq 0) \\ -(-x)^{\sqrt{3}} & (x<0) \end{cases}$$

で定めれば，$f(f(x))=g(x)$となる．次に$g(x)=-x^3$として，$f(f(x))=-x^3$である$f(x)$が存在したと仮定する．このとき

$$f(-x^3)=f(f(f(x)))=-(f(x))^3$$

が成立するので，特に$f(-1)=-(f(1))^3$，$f(1)=-(f(-1))^3$が成立する．この 2 つの式により

$$\{f(1)+f(-1)\}\{(f(1))^2-f(1)f(-1)+(f(-1))^2+1\}=0$$

が導かれるが，$f(x)$は実数値関数であるから，$f(1)+f(-1)=0$と分かる．そこで$f(1)=k$　$(f(-1)=-k)$とおくと，$k=k^3$となって，$k=0,\pm 1$である．この後はこの 3 つのkに対し調べていく．

$k=0$のときは，$f(1)=0$，$f(-1)=0$であるが，一方で$f(f(1))=-1$，$f(f(-1))=1$が成立するので，$f(0)=1$かつ$f(0)=-1$となって矛盾する．

$k=1$のときは，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$であるが，やはり$f(f(1))=-1$とにより$f(1)=-1$となり矛盾する．

$k=-1$のときは，$f(1)=-1$，$f(-1)=1$であるが，これも$f(f(1))=-1$とにより$f(-1)=-1$となって矛盾する．したがって，$f(f(x))=-x^3$を満たす$f(x)$は存在しない．

以上の議論によって，今回の問題は一応終わった訳であるが，ここで例えば，$g(x)=-x^3$の場合，なぜ後半になって，$x=0$，± 1のCaseを調べるだけになったのか，その理由を考えてみるとよい．また，$g(x)=x^3$のとき，$f(x)$が存在した理由も，もう少し詳しいことまで調べてみると，今回の問題についてもっと本質が明らかになってくると思われる．