2020年8月号　解説

　このコンクールでは，特に最近，問題の難易度をかなり上げてあるはずですが，それでもなお，毎回とても優秀な答案が現れることが多いようです．今回もそうでした．さっそくその内容を紹介しましょう．

　まず n 人のレディは，2020の倍数という条件を取り去って，一般に考えます．問題の仮定を満たすように m 種類の宝石 $J_1, J_2, \cdots\cdots, J_m$ を考えて，各々の宝石 J_k を持っているレディの数を a_k で表します．すると

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = n(n-1),\quad \sum_{k=1}^{m} {}_{a_k}\mathrm{C}_2 = 2\,{}_{n}\mathrm{C}_2$$

が成立し，これから $\sum_{k=1}^{m} {a_k}^2 = 3n(n-1)$ であることになります．そこでコーシーの不等式により

$$m\left(\sum_{k=1}^{m} {a_k}^2\right) \geqq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2$$

が成立するので，$m \geqq \dfrac{1}{3}n(n-1)$ であることになります．

　次に，$m = \dfrac{1}{3}n(n-1)$ であるような m 個の種類の宝石が存在するような n を考えて，そのような n の集合を S で表します．このとき次の事実が成立することが分かります．（各自で確かめてみて下さい.）

「$n \in S$ のとき，$2n+1 \in S$　かつ　$2n+4 \in S$」　　$\cdots\cdots(*)$

　また，$4 \in S$ であることは明らかですから，$(*)$ を何回か使用することによって，$2020 \in S$ であることも分かります．したがって，$n=2020$ とすれば宝石の種類の個数の最小値は，$\dfrac{1}{3}\cdot 2020 \cdot 2019 = 1359460$ となります.

Comment

　今回の問題で，n を2020としないで2020の任意の正の倍数とした訳は，問題を考える際の，その方法にヴァリエーションを持たせるためです．実際そうすることで $m = \dfrac{1}{3}n(n-1)$ である m が存在するような n を見付けるにも様々な考え方が可能になります．そして結果的に今回集まった答案にも *idea* のすぐれたものが複数ありました．例えば $(*)$ 以外にも

「$a, b \in S$ のとき，$ab \in S$」

も成立します. 実はその他にも色々な事を考えることが可能な問題ですが，その研究は東大特進コースの「数学研究倶楽部」で行ってみようと思っています. またそのときは，この問題を作成することになったより現代的な数学の世界の話もできるでしょう.