2022 年度第 2 回九大本番レベル模試　採点基準

数学(文系)

〔1〕 微分法と積分法

問題

座標平面上に 2 つの曲線

$C_1 : y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

$C_2 : y = x^2 - x + 2$

がある。以下の問いに答えよ。

(1) C_1, C_2 の 3 つの共有点のうち，x 座標が最も小さい点を A とする。C_1 の接線のうち，A を通る直線の方程式をすべて求めよ。

(2) C_2 上の点 $P(p,\ p^2-p+2)$ から C_1 に引ける接線の本数が 3 本であるような p の値の範囲を求めよ。

▶ 配点　50 点

▶ 出題のねらい

(1) 曲線上の点を通る接線を求めることができるかを問う。

(2) 接線の本数を方程式の実数解の個数に帰着させ，3 次方程式が異なる 3 実数解をもつ条件が理解できているかを問う。

▶ 解答

(1) C_1, C_2 の方程式を連立して，y を消去すると

$x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = x^2 - x + 2$

$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

$x(x-1)(x-3) = 0$

$x = 0,\ 1,\ 3$

よって，A の座標は $(0,\ 2)$

C_1 の方程式から，$y' = 3x^2 - 6x + 2$

C_1 上の点 $(t,\ t^3-3t^2+2t+2)$ における接線の方程式は

〔1〕

(1)　20 点　(2)　30 点

(1)　20 点

(ア)　点 A の座標 $(0,\ 2)$ に 5 点

$y=(3t^2-6t+2)(x-t)+(t^3-3t^2+2t+2)$

$y=(3t^2-6t+2)x-2t^3+3t^2+2$ ……①

これが，A を通るとき，

$2=-2t^3+3t^2+2$

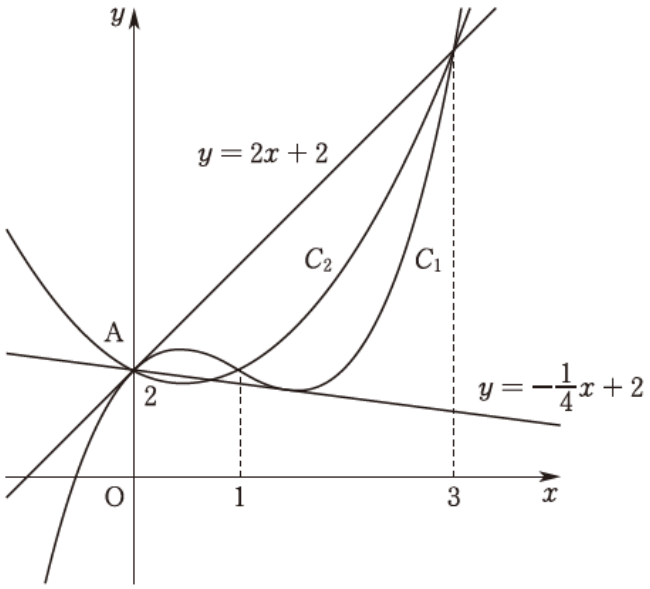
$2t^3-3t^2=0$

$t^2(2t-3)=0$

$t=0,\ \dfrac{3}{2}$

よって，A を通る接線の方程式は

$\underline{\underline{y=2x+2}},\ \underline{\underline{y=-\dfrac{1}{4}x+2}}$ ……(答)



(2) ① が P$(p,\ p^2-p+2)$ を通るとき，

$p^2-p+2=(3t^2-6t+2)p-2t^3+3t^2+2$

t について整理すると，

$2t^3-3(p+1)t^2+6pt+p^2-3p=0$ ・・・Ⓐ

$f(t)=2t^3-3(p+1)t^2+6pt+p^2-3p$ とおくと，

$f'(t)=6t^2-6(p+1)t+6p$

$=6(t-p)(t-1)$

$p\neq 1$ のとき，$f(t)$ は $t=1,\ p$ で極値をもつ。

求める条件は，3 次方程式 $f(t)=0$ が異なる 3 実数解をもつことであり，関数 $f(t)$ が異符号の極値をもつことである。

(イ)　①に 5 点

- 接点の x 座標を文字でおき，接線の方程式をその文字で表すことに 5 点
- ミスがあった場合，①の 1 行上の式に 3 点
- (ア) とは独立に採点

(ウ)　$t=0,\ \dfrac{3}{2}$(完答) に 5 点

(エ)　答 (完答) に 5 点

(2)　30 点

(1) と独立に採点する。

(オ)　Ⓐに 5 点

(カ)　$f'(t)$ が正しくて，5 点

(キ)　$t=1, p$ で極値をとることがわかって 5 点

増減表はなくてよい。

$p\neq 1$ の記述がなければ，3 点

$f(1)=p^2-1=(p-1)(p+1)$

$f(p)=-p^3+4p^2-3p=-p(p-1)(p-3)$

であるから，

$f(1)f(p)=-p(p-1)^2(p+1)(p-3)$

$(p-1)^2>0$ であるから，$f(1)f(p)<0$ である条件は，

$p(p+1)(p-3)>0$

よって，p の値の範囲は，

$\underline{\underline{-1<p<0,\ 3<p}}$ ……(答)

(ク)　極値が異符号であることがわかって 5 点

(ケ)　2 つの極値がともに正しくて 5 点
一方のみ正しい場合，3 点

(コ)　答 (完答) に 5 点
等号付きは，不可

▶ 解説

1°　3 次曲線では，異なる 2 点で接する接線は存在しないので，接点と接線は 1 対 1 に対応する。そこで，「(接線の本数) ＝ (接点の個数)」が成り立つ。

2°　3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 実数解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点を共有することであり，

「$f(x)$ が極値をもち，

(極大値)>0 かつ (極小値)<0」

である。

本問では，$p\neq 1$ のとき，$f(t)$ は $t=1$，p で極値をもち，$p<1$ のとき，$f(t)$ の増減は

t	……	p	……	1	……
$f'(t)$	＋	0	−	0	＋
$f(t)$	↗	(極大)	↘	(極小)	↗

となる。このとき，

極大値 $f(p)>0$，極小値 $f(1)<0$ から

$$\begin{cases}-p(p-1)(p-3)>0\\(p-1)(p+1)<0\end{cases}$$

$p<1$ より，$-1<p<0$ となる。

$p>1$ のとき，$f(t)$ の増減は

t	……	1	……	p	……
$f'(t)$	＋	0	−	0	＋
$f(t)$	↗	(極大)	↘	(極小)	↗

となる。このとき，

極大値 $f(1)>0$，極小値 $f(p)<0$ から

$$\begin{cases}(p-1)(p+1)>0\\ -p(p-1)(p-3)<0\end{cases}$$

$p>1$ より，$p>3$ となる。

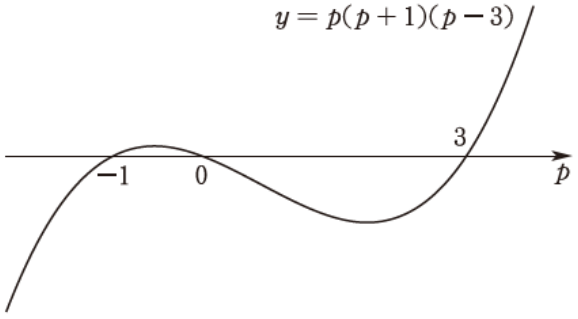
極大値と極小値を明確にするなら，このような場合分けをして求めることになるが，3 次曲線では

「(極大値)>0 かつ (極小値)<0」

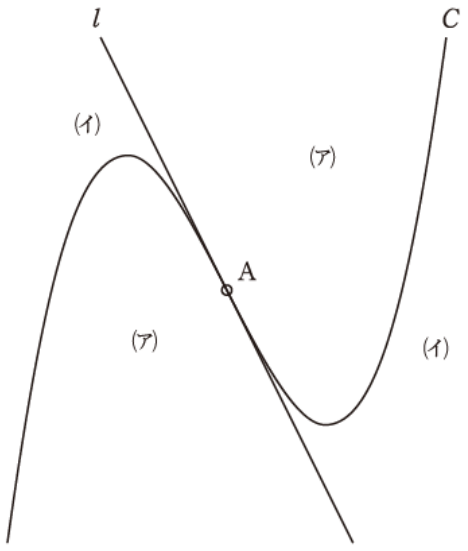
$\Longleftrightarrow$ (極大値)・(極小値)<0

であるから，まとめて計算する方が簡潔になる。

$f(1)f(p)$ は p の 5 次式になり，次数が高いので符号が確定している $(p-1)^2$ を除いて 3 次不等式を考えればよい。$y=p(p+1)(p-3)$ のグラフをかき，$y>0$ となる p の範囲から，$-1<p<0$，$3<p$ となる。



3° 3 次曲線は点対称であり，次図のように 3 次曲線を C，対称の中心を A,A における接線を l とすると，座標平面は C と l によって 4 つの領域に分けられる。



平面上のある点から C に引ける接線の本数は，上図において，(ア)，(イ)は境界線を含まない領域として，

・(ア)に含まれる点と A からは 1 本

・C と l 上の点で A を除く点からは 2 本

・(イ)に含まれる点からは 3 本

である。(1)は C_1 上の点を通る接線なので，2 本になる。C_1 の点対称の中心は $(1, 2)$ であり，この点における接線は $y=-x+3$ である。C_2 と直線 $y=-x+3$ との共有点の x 座標が $x=-1, 1$ であり，C_1 と C_2 の共有点の x 座標が $x=0, 1, 3$ であることから，C_1 に 3 本の接線が引ける C_2 上の点 P の x 座標は，$-1<x<0, 3<x$ の範囲になる。しかし，このことを既知として解答することはできない。

〔2〕 ベクトル

問題

座標空間内に原点 O と 4 点 A(1, 2, 0), B(1, 0, 1), C(0, 0, 2), P があり，点 P は $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}$ を満たしている。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(2) 平面 ABC と直線 OP の交点を Q とするとき，線分の長さの比 OQ : QP を求めよ。

(3) 四面体 PABC の体積を求めよ。

▶ 配点　50 点

▶ 出題のねらい

(1) 座標空間において，三角形の面積が求められるかを問う。

(2) 点が平面上にある条件が理解できているかを問う。

(3) 座標空間において，四面体の体積が効率よく求められるかを問う。

▶ 解答

(1) $\overrightarrow{AB}=(0, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1, -2, 2)$ であるから，

$$|\overrightarrow{AB}|^2=0^2+(-2)^2+1^2=5$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+(-2)^2+2^2=9$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)+1\cdot2=6$$

よって，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot9-6^2}$$

$$=\underline{\underline{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots(答)$$

〔2〕

(1)　15 点　(2)　10 点　(3)　25 点

(1)　15 点

(ア)　$|\overrightarrow{AB}|^2$, $|\overrightarrow{AC}|^2$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ に各 3 点

(イ)　答に 6 点
面積公式がわかって，計算ミスなら 3 点
$\cos\angle BAC$ から，$\sin\angle BAC$ を求めて，$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC$ から求めてて，計算ミスなら 3 点

(2) $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$（$k$ は実数）とおくと，

$$\overrightarrow{OQ}=k(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC})$$
$$=2k\overrightarrow{OA}+3k\overrightarrow{OB}+4k\overrightarrow{OC}$$

Q は平面 ABC 上にあるから

$$2k+3k+4k=1 \text{ ゆえに } k=\frac{1}{9}$$

よって，

$$OQ:QP=\underline{\underline{1:8}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) (2)より，四面体 PABC の体積は四面体 OABC の体積の 8 倍である。
まず，四面体 OABC の体積を求める。
O から平面 ABC に引いた垂線と平面 ABC との交点を H とすると，
$\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$（$m$, n は実数）とおける。

$$\overrightarrow{AH}=(-n,\ -2m-2n,\ m+2n)$$

であるから，

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$$
$$=(1-n,\ 2-2m-2n,\ m+2n)$$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=(1-n)\cdot 0-(2-2m-2n)\cdot 2+(m+2n)\cdot 1$$
$$=0$$
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=(1-n)\cdot(-1)-(2-2m-2n)\cdot 2+(m+2n)\cdot 2$$
$$=0$$

よって，

$$\begin{cases}5m+6n-4=0\\6m+9n-5=0\end{cases}$$

(2)　10 点

(1) と独立に採点する。

(ウ)　$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ に 2 点

(エ)　Q が平面 ABC 上にある条件が理解できていて 3 点

(オ)　答に 5 点

(3)　25 点

(1)，(2) と独立に採点する。

(カ)　O または P から平面 ABC に下した垂線の足の座標を求める方針に 5 点

垂線の足の位置ベクトルの設定して，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ との内積 0 を計算しようとしていれば，ミスがあっても 5 点与える。

より，

$$m=\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{9}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{8}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{9}\right)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

よって，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

求める四面体 PABC の体積は

$$8\cdot\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$ ……(答)

(キ)　垂線の足 H の座標が求められて 5 点
立式は正しいが，計算ミスの場合，3 点

(ク)　垂線の長さが求められて 5 点
$\mathrm{OH}=\frac{4}{3}$ または P からの垂線の長さ $\frac{32}{3}$ が求めれていれば，(キ) を書いていなくても (キ),(ク) 合わせて 10 点

(ケ)　四面体 OABC の体積に 5 点

(コ)　答に 5 点
P からの垂線を求めている場合，(ケ) の 5 点を (コ) に与え，(コ) を 10 点とする。

〔3〕 整数の性質

問題

以下の問いに答えよ。

(1) n を 5 の倍数でない自然数とするとき，n^6 を 5 で割った余りを求めよ。

(2) $(m^3+2n^3)(m^3+3n^3)$ を 5 で割った余りが 1 となるような自然数 m，n の組で，$1 \leqq m \leqq 100$，$1 \leqq n \leqq 100$ を満たすものの個数を求めよ。

▶ 出題のねらい

(1) 自然数を余りによって分類する考え方ができるかを問う。

(2) 条件を整理，分析して，積の法則を用いて個数を数えることができるかを問う。

▶ 解答

(1) n は 5 の倍数でない自然数であるから，5 で割った余りは 1,2,3,4 のいずれかである。

(i) n を 5 で割った余りが 1 または 4 のとき，

$n=5k\pm1$（k は整数）と表すことができる。

二項定理を用いて展開すると，

$$\begin{aligned} n^6&=(5k\pm1)^6 \\ &=(5k)^6\pm{}_6\mathrm{C}_1(5k)^5+{}_6\mathrm{C}_2(5k)^4\pm\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad \pm{}_6\mathrm{C}_5(5k)+1 \text{（複号同順）} \\ &=5N+1 \text{（}N\text{ は整数）} \end{aligned}$$

よって，このとき，n^6 を 5 で割った余りは 1

(ii) n を 5 で割った余りが 2 または 3 のとき，

$n=5k\pm2$（k は整数）と表すことができる。

(i)と同様にして，

$$\begin{aligned} n^6&=(5k\pm2)^6 \\ &=(5k)^6\pm{}_6\mathrm{C}_1(5k)^5\cdot2+{}_6\mathrm{C}_2(5k)^4\cdot2^2\pm\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad \pm{}_6\mathrm{C}_5(5k)\cdot2^5+2^6\text{（複号同順）} \\ &=5M+64 \text{（}M\text{ は整数）} \\ &=5(M+12)+4 \end{aligned}$$

よって，このとき，n^6 を 5 で割った余りは 4

〔3〕

(1)　20 点　(2)　30 点

(1)　20 点

(ア)　n を 5 で割った余りで表すことに 2 点

(イ)　6 乗を割った余りを求める方針に 10 点

- 余りで分類した 4 つについて，余りを求める方針が正しくて 10 点
- 4 つがそろっていなかったり，一部に計算ミスがあるなどは 5 点
- 方針が読み取れず，答だけと判断するなら，(ウ) のみの点を与える。

(ウ)　それぞれの余りに各 2 点で 8 点

$\begin{cases} n \text{ を } 5 \text{ で割った余りが } 1 \text{ または } 4 \text{ のとき,} \\ \quad n^6 \text{ を } 5 \text{ で割った余りは } 1 \\ n \text{ を } 5 \text{ で割った余りが } 2 \text{ または } 3 \text{ のとき,} \\ \quad n^6 \text{ を } 5 \text{ で割った余りは } 4 \end{cases}$

……(答)

(2)　$(m^3+2n^3)(m^3+3n^3)=m^6+5m^3n^3+6n^6$

$=5(m^3n^3+n^6)+m^6+n^6$

であるから，$(m^3+2n^3)(m^3+3n^3)$ を 5 で割った余りは m^6+n^6 を 5 で割った余りに等しい。

自然数 n が 5 の倍数のとき，n^6 も 5 の倍数であるから，(1)の結果と合わせて，m^6, n^6 を 5 で割った余りは 0，1，4 のいずれかになる。したがって，m^6+n^6 を 5 で割った余りが 1 になるのは，m^6, n^6 の一方が 5 の倍数であり，他方が 5 で割った余りが 1 のとき，すなわち，m, n の一方が 5 の倍数で，他方が 5 で割った余りが 1 または 4 のときである。

1 以上 100 以下の自然数のうち，5 の倍数は 20 個あり，5 で割った余りが 1，4 であるものもそれぞれ 20 個あるから，5 で割った余りが 1 または 4 になるものは 40 個ある。

したがって，求める m, n の組の個数は

$20\cdot40+40\cdot20=1600$ (個)　……(答)

▶ **解説**

1° (1)では，n^6 ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) を 5 で割った余りが 1，4，4，1，0 を繰り返すことに気が付き，それが正しいことを証明することになる。**解答**のように，n を 5 で割った余りで分類する考え方が重要である。$n=5k+r$ (k は整数，$r=1, 2, 3, 4$) とおいて，6 乗を展開すればよい。$\pm$ を使えば 4 つの場合分けが 2 つで済むので，**解答**では，そうしてある。また，展開において，二項定理を用いて計算している。

(2)　30 点

(1) にミスがあっても見る。

(エ)　m^6+n^6 を 5 で割った余りが 1 に気が付いて 5 点

(オ)　m^6, n^6 の一方が 5 の倍数で，他方を 5 で割った余りが 1 であることに気が付いて 5 点

(カ)　m, n の一方が 5 の倍数で，他方を 5 で割った余りが 1 または 4 であることに気が付いて 5 点

(キ)　5 の倍数，5 で割った余りが 1，4 の個数が各 20 個であることを求めて 5 点

(カ) に到達していなければ，この点無し。

(ク)　答に 10 点

二項定理は

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r$$

である。

他の示し方として，$(n+5)^6$ と n^6 は 5 で割った余りが等しいことを示してもよい。

$n+5$ と n が 5 で割った余りが等しいからとしてもよいが，因数分解して示すこともできる。

因数分解の公式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

を用いて，

$$(n+5)^6-n^6=\{(n+5)-n\}\{(n+5)^5+(n+5)^4n+\cdots\cdots+(n+5)n^4+n^5\}$$

これより，$(n+5)^6-n^6$ が 5 の倍数であることから，$(n+5)^6$ と n^6 は 5 で割った余りが等しいことが言える。

また，余りが等しいことを表す記号として，合同式がある。

二つの自然数 M，N を 2 以上の自然数 p で割ったときの余りが等しいことを

$$M\equiv N\pmod p$$

と書き，「p を法として，M と N は合同である」という。

$$M\equiv N\pmod p$$

のとき，$k=1, 2, \cdots\cdots$ として，

$$M^k\equiv N^k\pmod p$$

が成り立つことを用いて，n^6 を 5 で割った余りを求めると，次のようになる。

以下，合同式は 5 を法とする。

(i)　$n\equiv 1$ のとき，$n^6\equiv 1^6\equiv 1$

(ii)　$n\equiv 2$ のとき，$n^6\equiv 2^6\equiv 64\equiv 4$

(iii)　$n\equiv 3$ のとき，$n^6\equiv 3^6\equiv 729\equiv 4$

(iv)　$n\equiv 4$ のとき，$n^6\equiv 4^6\equiv 4096\equiv 1$

2°　(2)では，$(m^3+2n^3)(m^3+3n^3)$ を展開して，5 で割り切れる部分を除外して，m^6+n^6 を 5 で割った余りに帰着させることがポイントとなる。m^6, n^6 を 5 で割った余りは 0，1，4 のいずれかであるから，各場合について，m^6+n^6 を 5 で割った余りを表にまとめると

m^6 \ n^6	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	0
4	4	0	3

となる。したがって，m^6+n^6 を 5 で割った余りが 1 になるのは，m^6, n^6 を 5 で割った余りは一方が 0 で他方が 1 のときのみである。

〔4〕 数と式，確率

問題

a, b, c を整数として，関数

$$f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$$

の最小値を m とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a=b<c$ のとき，m を求めよ。

(2) $a<b<c$ のとき，m を求めよ。

(3) 1つのサイコロを3回投げる。1回目に出た目を a，2回目に出た目を b，3回目に出た目を c とする。$m=4$ となる確率を求めよ。

▶ 配点　50点

▶ 出題のねらい

(1)，(2)は絶対値で表された基本的な関数の最小値を求めることができるかを問う。

(3) サイコロの基本的な確率が求められるかを問う。

▶ 解答

(1) $a=b<c$ のとき，

$$f(x)=2|x-a|+|x-c|$$

(i) $x<a$ のとき，

$$f(x)=-2(x-a)-(x-c)$$
$$=-3x+2a+c$$

(ii) $a\leqq x<c$ のとき，

$$f(x)=2(x-a)-(x-c)$$
$$=x-2a+c$$

(iii) $c\leqq x$ のとき，

$$f(x)=2(x-a)+(x-c)$$
$$=3x-2a-c$$

(i)，(ii)，(iii)より，$f(x)$ のグラフは次図のようになる。

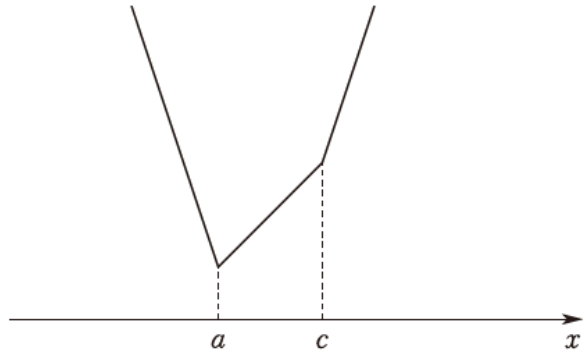
〔4〕

(1)　10点　(2)　12点　(3)　28点

(1)　10点

(ア)　3つの区間と式が正しくて各2点
区間の等号は，どちらかについていて，抜けがなければOK。抜けがあれば，全体から1点引き。

(イ)　答に4点
(ア)がなく，答のみは点無し。グラフはなくて良い。



よって，$f(x)$ の最小値 m は

$m=f(a)=\underline{\underline{c-a}}$ ……(答)

(2) $a<b<c$ のとき，

$f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$

(i) $x<a$ のとき，

$f(x)=-(x-a)-(x-b)-(x-c)$

$=-3x+a+b+c$

(ii) $a\leqq x<b$ のとき，

$f(x)=(x-a)-(x-b)-(x-c)$

$=-x-a+b+c$

(iii) $b\leqq x<c$ のとき，

$f(x)=(x-a)+(x-b)-(x-c)$

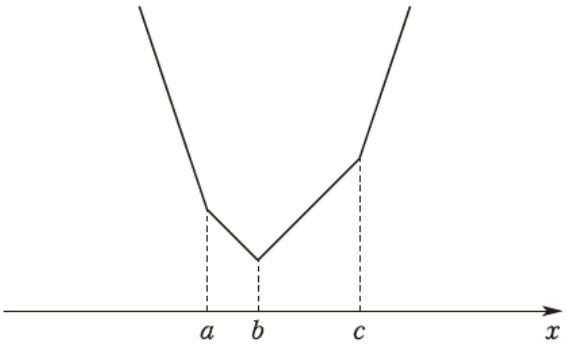
$=x-a-b+c$

(iv) $c\leqq x$ のとき，

$f(x)=(x-a)+(x-b)+(x-c)$

$=3x-a-b-c$

(i)～(iv)より，$f(x)$ のグラフは次図のようになる。



よって，$f(x)$ の最小値 m は

$m=f(b)=\underline{\underline{c-a}}$ ……(答)

(2)　12 点

(1) と独立に採点する。

(1) と同様の配点とする。

(ウ)　4 つの区間と式が正しくて各 2 点

(エ)　答に 4 点

(3)(ア)　$a=b=c$ のとき，

$$f(x)=3|x-a|$$

であり，このとき，最小値 m は

$$m=f(a)=0$$

であるから，$m=4$ となることはない。

(イ)　a, b, c のうち 2 つが等しいとき，

$a=b<c$ とすると，(1)より $m=c-a$

$a=b>c$ とすると，(1)と同様にして，

(i)　$x<c$ のとき，

$$f(x)=-2(x-a)-(x-c)$$
$$=-3x+2a+c$$

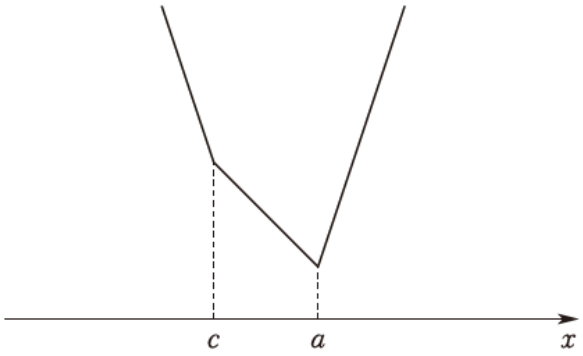
(ii)　$c\leqq x<a$ のとき，

$$f(x)=-2(x-a)+(x-c)$$
$$=-x+2a-c$$

(iii)　$a\leqq x$ のとき，

$$f(x)=2(x-a)+(x-c)$$
$$=3x-2a-c$$

(i), (ii), (iii)より，$f(x)$ のグラフは次図のようになる。



このとき，$f(x)$ の最小値 m は

$$m=f(a)=a-c$$

$a=b<c$ または $a=b>c$ のとき，$m=4$ となるのは，

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 5),\ (2,\ 2,\ 6),$$
$$(5,\ 5,\ 1),\ (6,\ 6,\ 2)$$

の 4 組。

(3)　28 点

(1)，(2) と独立に採点する。

(オ)　$a=b=c$ のとき，$m=4$ とならないことがわかって 5 点

(カ)　3 回の目の (最大) − (最小) $=4$ に気が付いて 5 点

(1), (2) の m が求まっていなければ，この点無し。

(1)，(2) ができていれば，$a=b>c$ の議論が抜けていても減点なし。

a, b, c の入れ替えを考えると，各々 3 通りあるから，(a, b, c) の組は

$4\times3=12$ (個)

(ウ) a, b, c が異なる 3 数であるとき，$a<b<c$ とすると，(2)より，$m=c-a$ であるから，$m=4$ となるのは，

$(a, b, c)=(1, b, 5),\ (b=2, 3, 4)$

$(2, b, 6),\ (b=3, 4, 5)$

の 6 組。

a, b, c の入れ替えを考えると，各々 $3!=6$（通り）あるから，(a, b, c) の組は

$6\times6=36$ (個)

(a, b, c) の組はすべてで $6^3=216$（個）であり，(ア)〜(ウ)より，求める確率は

$$\frac{12+36}{216}=\underline{\underline{\frac{2}{9}}} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

▶ **解説**

1° $|x-a|=\begin{cases}x-a & (x\geqq a)\\ -(x-a) & (x<a)\end{cases}$

2° $a\leqq b\leqq c$ とすると，

$f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ の最小値 m は

$m=f(b)=c-a$

となる。したがって，$m=4$ となるのは，

$(a, c)=(1, 5), (2, 6)$

のときであり，それぞれについて，b が 5 通りあるから，(a, b, c) の組は 10 個ある。

a, b, c の大小関係を外して，a, b, c の入れ替えを考えると，同じ数字が含まれるか含まれないかで分けて，同じ数字が含まれる 4 組については，

$\frac{3!}{2!}=3$ (通り) あり，同じ数字が含まれない 6 組については，$3!=6$（通り）あるので，

$4\times3+6\times6=48$ (個)

となる。

(キ) 2 つが同じ目の 12 通りが求められて 5 点

組数 4 組と各 3 通りがわかって 5 点

(ク) 3 つが異なる目の 36 通りが求められて 5 点

組数 4 組と各 6 通りがわかって 5 点

(ケ) 答に 8 点

(キ)，(ク) は，答えが合っていない場合の部分点。

答が合っていれば，(キ)，(ク) の点は与える。

約分が不十分なら，6 点。