2022年度第3回九大本番レベル模試 採点基準

数学（文系）

〔1〕 微分法と積分法

問題

a を正の実数とする。

xy 平面上の曲線 $C : y=(x^2-4)(x-a)$ と y 軸との交点を A とする。C の A における接線を l として，l と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) C と l で囲まれる部分の面積を T とする。$T=S$ となるときの a の値を求めよ。

(2) C の $-2 \leqq x \leqq 2$ の部分と x 軸で囲まれる部分の面積を U とする。$0<a<2$ のとき，$U>S$ であることを示せ。また，$U>S$ となるときの a の値の範囲を求めよ。

▶ 配点 50点

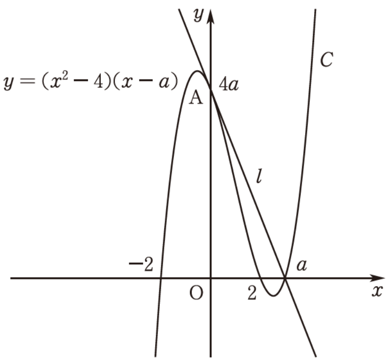
▶ 出題のねらい

(1) 3次曲線と接線で囲まれる部分の面積を求めることができるかを問う。

(2) 3次曲線と x 軸とで囲まれる部分の面積を，場合分けをして求めることができるか，および，不等式の論証力を問う。

▶ 解答

(1)



C の方程式は $y=x^3-ax^2-4x+4a$ であるから，

$$y'=3x^2-2ax-4$$

であり，A$(0,\ 4a)$ における曲線 C の接線 l の方程式は

$$y=-4x+4a$$

である，l と x 軸との交点の座標は $(a,\ 0)$ であるから，

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 4a=2a^2$$

である，また，C と l との共有点の x 座標は，

$x=0,\ a$ であるから，

〔1〕

(1) 25点 (2) 25点

(1) 25点

(ア) 接線 l の方程式に5点

(イ) $S=2a^2$ に5点

$$T=\int_0^a\{(-4x+4a-(x^3-ax^2-4x+4a)\}dx$$

$$=-\int_0^a(x^3-ax^2)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3\right]_0^a$$

$$=-\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^4\right)=\frac{a^4}{12}$$

であり，$T=S$ より，

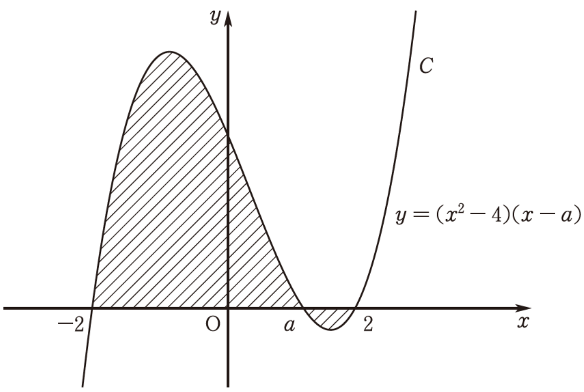
$$\frac{a^4}{12}=2a^2$$

$a>0$ より，

$$a^2=24$$

$$\underline{\underline{a=2\sqrt{6}}} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　$0<a<2$ のとき，U は下図の斜線部分の面積であり，$x\leqq 0$ の部分だけを考えると，



$$U>\int_{-2}^0(x^3-ax^2-4x+4a)dx$$

である。

$$\int_{-2}^0(x^3-ax^2-4x+4a)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-2x^2+4ax\right]_{-2}^0$$

$$=\frac{16}{3}a+4$$

より，

$$U-S>\frac{16}{3}a+4-2a^2=-2\left(a-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{68}{9}$$

であり，$0<a<2$ のとき，

$$-2\left(a-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{68}{9}>4$$

である。よって，

$$U>S$$

が成り立つ。　（証明終わり）

$a\geqq 2$ のとき，

(ウ)　<u>l と C の交点 $x=a$ に気が付いて 5 点</u>

(エ)　<u>$T=\dfrac{a^4}{12}$ に 5 点</u>

定積分の立式が正しくて，計算ミスなら 2 点

定積分の立式がなければ，この点無し。

(オ)　<u>答に 5 点</u>

解説 1° にあるように，　S, T を計算せずに，
$S-T=S_1-S_3$ で計算している場合，
(ア)，(オ) は同じで 5 点ずつ。
(イ)〜(エ) の 15 点を，
$a>2$ であることの説明に 3 点，
$S-T=S_1-S_3$ に気が付いて 5 点。
$S_1-S_3=-\dfrac{1}{12}a^4+2a^2$ に 7 点。

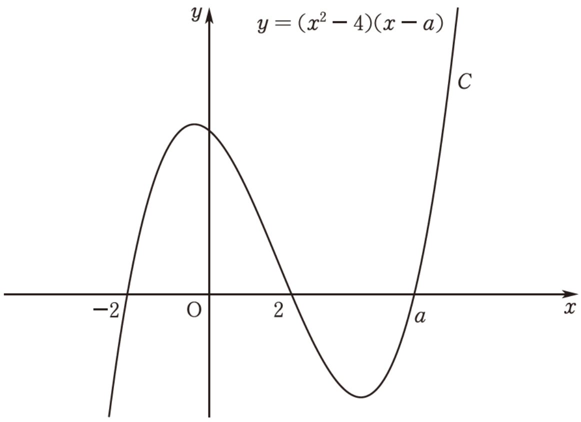
(2)　25 点

(1) で，S が出ていれば見る。

(カ)　<u>$0<a<2$ で $U>S$ の証明に 10 点</u>

$U=-\dfrac{1}{6}a^4+4a^2+8$ が正しくて，5 点。U を求めず，
$\displaystyle\int_{-2}^0(x^3-ax^2-4x+4a)dx=\frac{16}{3}a+4$ を求めていても，同じく 5 点

S が正しくて，平方完成等の $U>S$ の論証に 5 点。



$$(x^2-4)(x-a)\geqq 0 \quad (-2\leqq x\leqq 2)$$

であるから，

$$U=\int_{-2}^{2}(x^3-ax^2-4x+4a)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(-ax^2+4a)dx$$

$$=2\left[-\frac{a}{3}x^3+4ax\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{3}a$$

このとき，$U>S$ より，

$$\frac{32}{3}a>2a^2$$

$$a\left(a-\frac{16}{3}\right)<0$$

$a\geqq 2$ より，

$$2\leqq a<\frac{16}{3}$$

これと $0<a<2$ のとき，$U>S$ であることから，

$U>S$ となる a の値の範囲は，

$$0<a<\frac{16}{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

▶ **解説**

1°　曲線 C と x 軸の共有点は $x=\pm 2$，a であるから，a と 2 との大小関係で様子が異なる。

$a<2$ のときは，T はかなり小さい値となるから，$S=T$ とはならない。実際，$S-T$ は**解答**の計算から，$0<a<2$ のとき，

$$2a^2-\frac{1}{12}a^4=\frac{1}{12}a^2(24-a^2)>0$$

であるから，$S>T$ となる。

$a\geqq 2$ のとき，C の $0\leqq x\leqq 2$ の部分と x 軸，y 軸で囲まれる部分の面積を S_1，C の $0\leqq x\leqq 2$ の部分と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_2，C の $2\leqq x\leqq a$ の部分と x 軸で囲まれる部分の面積を S_3

(キ)　$a\geqq 2$ の場合の $U=\dfrac{32}{2}a$ を求めて 5 点

$a\geqq 2$ または $a>2$ の記述がない場合，3 点。

(ク)　答に 10 点

0 < a < 2 の結果とまとめて，この点を与える。

a と 2 との大小で分けて議論していない場合，この点無し。

とすると，

$$S=S_1+S_2,\quad T=S_2+S_3$$

であるから，

$$S-T=S_1-S_3$$

であり，$T=S$ である条件は，$S_1=S_3$，すなわち，C の $0\leqq x\leqq a$ の部分と x 軸，y 軸で囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなることを表している。このことから，次のようにも計算できる。

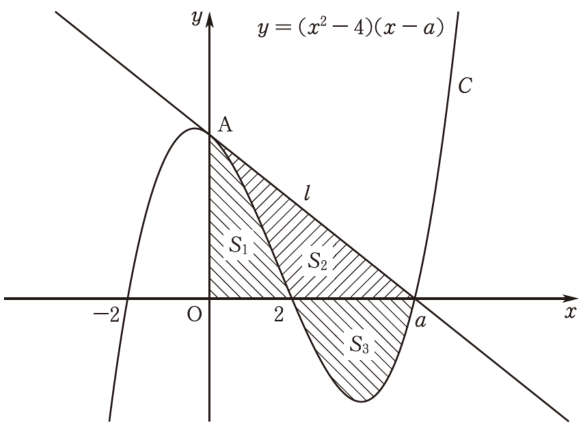
$$\begin{aligned}S-T&=S_1-S_3\\&=\int_0^2(x^3-ax^2-4x+4a)dx\\&\qquad-\left\{-\int_2^a(x^3-ax^2-4x+4a)dx\right\}\\&=\int_0^2(x^3-ax^2-4x+4a)dx\\&\qquad+\int_2^a(x^3-ax^2-4x+4a)dx\\&=\int_0^a(x^3-ax^2-4x+4a)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-2x^2+4ax\right]_0^a\\&=-\frac{1}{12}a^4+2a^2\end{aligned}$$

$S=T$ より，

$$-\frac{1}{12}a^4+2a^2=0$$

$a\geqq 2$ のとき，

$$a=2\sqrt{6}$$



2°　$0<a<2$ のとき，$U>S$ を示すのに，**解答**では，$x\leqq 0$ の部分だけを用いて計算したが，$0<a<2$ のときの U を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x(t^3-at^2-4t+4a)dt\\&=\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-2x^2+4ax\end{aligned}$$

とすると，

$$F(a)=-\frac{1}{12}a^4+2a^2$$

$$F(2)=\frac{16}{3}a-4$$

$$F(-2)=-\frac{16}{3}a-4$$

$$U=\int_{-2}^{a}(x^3-ax^2-4x+4a)dx$$
$$-\int_{a}^{2}(x^3-ax^2-4x+4a)dx$$
$$=\left[F(x)\right]_{-2}^{a}-\left[F(x)\right]_{a}^{2}$$
$$=2F(a)-F(2)-F(-2)$$
$$=-\frac{1}{6}a^4+4a^2+8$$

$$U-S=-\frac{1}{6}a^4+2a^2+8$$
$$=-\frac{1}{6}(a^2-6)^2+14$$

$0<a^2<4$ より，$-\frac{1}{6}(a^2-6)^2+14>8$ であるから，

$U>S$

となる。

3°　$a\geqq 2$ のときの U の計算を**解答**では，次のことを使って計算している。

p を正の定数として，

$$\int_{-p}^{p}x^n dx=\begin{cases}0 & (n=1,\ 3,\ \cdots\cdots)\\ 2\int_{0}^{p}x^n dx & (n=0,\ 2,\ \cdots\cdots)\end{cases}$$

〔2〕 方程式，三角関数

問題

a，b，c を実数とする。x の 3 次方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

の 3 つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\sin 2\theta$ であるとする。$0<\theta<\pi$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $c\leqq-\dfrac{3}{8}$ のとき，θ のとり得る値の範囲を求めよ。また，θ がこの範囲の中で最大値であるとき，b の値を求めよ。

▶ **配点　50 点**

▶ **出題のねらい**

3 次方程式の与えられた解から係数との関係式を導くことができるかと，三角関数のとり得る値の範囲や

〔2〕

(1)　20 点　(2)　30 点

三角関数の不等式の解が正確に求められるかを問う。

▶ 解答

x の3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\sin 2\theta$ であるから，x^3 の係数が1であることにも注意すると，等式

$$x^3+ax^2+bx+c$$
$$=(x-\sin\theta)(x-\cos\theta)(x-\sin 2\theta)$$

が成り立つ。右辺を展開して係数，定数項を比較することにより，

$$\begin{cases} a=-(\sin\theta+\cos\theta+\sin 2\theta) \\ b=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin 2\theta+\sin 2\theta\sin\theta \\ c=-\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta \end{cases}$$

が成り立つ。

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，$0<\theta<\pi$ より $\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$ であるから，

$$-1<t\leqq\sqrt{2}$$

$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin 2\theta$ であるから，

$$a=-(\sin\theta+\cos\theta+\sin 2\theta)$$
$$=-(t+t^2-1)$$
$$=-t^2-t+1$$
$$=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

よって，a のとり得る値の範囲は

$$\underline{\underline{-1-\sqrt{2}\leqq a\leqq\frac{5}{4}}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ より，

$$c=-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

であるから，$c\leqq-\frac{3}{8}$ のとき，

$$\sin^2 2\theta\geqq\frac{3}{4}$$

よって，

$$\sin 2\theta\leqq-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin 2\theta$$

$0<2\theta<2\pi$ より，

$$\frac{\pi}{3}\leqq 2\theta\leqq\frac{2\pi}{3},\quad \frac{4\pi}{3}\leqq 2\theta\leqq\frac{5\pi}{3}$$

したがって，

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\quad \frac{2\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{6}}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

この範囲のうち，θ が最大，すなわち，$\theta=\frac{5\pi}{6}$ の

(1)　20点

(ア)　$\underline{a=-(\sin\theta+\cos\theta+\sin 2\theta)\text{ に5点}}$

(イ)　$\underline{t=\sin\theta+\cos\theta\text{ で }a\text{ を }t\text{ で表して5点}}$

(ウ)　$\underline{-1<t\leqq\sqrt{2}\text{ に5点}}$
等号ミスは3点。

(エ)　<u>答に5点</u>
等号ミスは3点。

(2)　30点

(1) と独立に採点する。

(オ)　$\underline{c=-\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta\text{ に5点}}$

(カ)　$\underline{c=-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\text{ に5点}}$

(キ)　<u>$\sin 2\theta$ の範囲が正しくて5点</u>

(ク)　<u>θ の範囲が正しくて5点</u>

とき，

$$b=\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$=\underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}}}$$ ……**(答)**

▶ 解説

1°　一般に，整式 $P(x)$ について，

「$P(\alpha)=0 \iff P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ」

が成り立つ。これを因数定理という。

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ の 3 つの解を α，β，γ とすると，因数定理から，等式

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

が成り立つ。右辺を展開すると，

$$a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}$$

であり，左辺は，

$$a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\right)$$

であるから，係数，定数項を比較することにより，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

が成り立つ。これを 3 次方程式の解と係数の関係という。本問でもそのことを用いれば，解答がもう少し簡潔になる。

2°　a は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式で表される。この場合，$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，a を t の関数で表すことができる。t のとり得る値の範囲は，三角関数の合成を用いて求めることになる。

3°　c も $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式で表されるから，(1) の t を用いて変形すると，

$$c=-\frac{1}{2}(t^2-1)\cdot(t^2-1)=-\frac{1}{2}(t^2-1)^2$$

となる。$c\leqq-\dfrac{3}{8}$ のとき，

$$(t^2-1)^2\geqq\frac{3}{4}$$

$$t^2\leqq\frac{2-\sqrt{3}}{2},\quad \frac{2+\sqrt{3}}{2}\leqq t^2$$

となるが，この式から θ の範囲は求めにくい。

(ケ)　$\underline{b=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin 2\theta+\sin 2\theta\sin\theta}$
<u>に 5 点</u>

(1) に書いてあっても，(2) の配点の中で 5 点与える。

(コ)　<u>b の値に 5 点</u>

〔3〕 場合の数と確率

問題

n を 2 以上の自然数とする。1 から n までの数が 1 つずつ書かれたカードが 2 枚ずつ，合計 $2n$ 枚のカードが入った袋がある。この袋の中から同時に 2 枚のカードを取り出し，2 枚が同じ数であればその数を，異なる数であれば大きい方を a とする。取り出した 2 枚のカードを元に戻し，もう一度袋の中から同時に 2 枚を取り出し，2 枚が同じ数であればその数を，異なる数であれば大きい方を b とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a=k$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$ である確率を求めよ。

(2) $a=b$ である確率を求めよ。

(3) $b=a+1$ である確率を求めよ。

▶ 配点　50 点

▶ 出題のねらい

(1) 取り出すときの確率を文字式で求めることができるかを問う。

(2) 確率を数列の和の計算を利用して求めることができるかを問う。

(3) (2)と同様の数列の和の計算であるが，(1)の結果の利用と，1 から $n-1$ の和の計算ができるかを問う。

▶ 解答

(1) $2n$ 枚のカードから 2 枚を取り出すときの取り出し方は，

$${}_{2n}\mathrm{C}_2=\frac{2n(2n-1)}{2\cdot 1}=n(2n-1) \text{ 通り}$$

であり，これらは同様に確からしい。k が書かれたカードを 2 枚とも取り出す場合は，1 通りである。また，k が書かれた 2 枚のカードから 1 枚取り出し，k より小さい数が書かれた $(2k-2)$ 枚のカードから 1 枚取り出す取り出し方は

$2(2k-2)$ 通り

よって，$a=k$ となる取り出し方は，

$1+2(2k-2)=4k-3$ (通り)

である。したがって，求める確率は

〔3〕

(1)　15 点　(2)　15 点　(3)　20 点

(1)　15 点

(ア)　すべての場合の数 ${}_{2n}\mathrm{C}_2$ に 5 点

(イ)　$(4k-3)$ 通りがわかって 5 点

(ウ)　答に 5 点

$$\underline{\underline{\frac{4k-3}{n(2n-1)}}}$$ ……(答)

(2)　$b=k$ となる確率も $\dfrac{4k-3}{n(2n-1)}$ であるから，$a=b$ となる確率は，

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{4k-3}{n(2n-1)}\right\}^2$$
$$=\frac{1}{n^2(2n-1)^2}\sum_{k=1}^{n}(16k^2-24k+9)$$
$$=\frac{1}{n^2(2n-1)^2}\left\{16\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-24\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+9n\right\}$$
$$=\underline{\underline{\frac{16n^2-12n-1}{3n(2n-1)^2}}}$$ ……(答)

(3)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ として，$b=k+1$ となる確率は，(1)より，

$$\frac{4k+1}{n(2n-1)}$$

よって，$b=a+1$ となる確率は

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{n(2n-1)}\cdot\frac{4k+1}{n(2n-1)}$$
$$=\frac{1}{n^2(2n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}(16k^2-8k-3)$$
$$=\frac{1}{n^2(2n-1)^2}\left\{16\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-8\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-3(n-1)\right\}$$
$$=\underline{\underline{\frac{(n-1)(16n^2-20n-9)}{3n^2(2n-1)^2}}}$$ ……(答)

▶ 解説

(1)は，1 から k までの $2k$ 枚から 2 枚取り出す場合から，1 から $k-1$ までの $2(k-1)$ 枚から 2 枚取り出す場合を除いて求めてもよい。

$${}_{2k}C_2-{}_{2(k-1)}C_2=\frac{2k(2k-1)}{2\cdot1}-\frac{(2k-2)(2k-3)}{2\cdot1}$$
$$=k(2k-1)-(k-1)(2k-3)$$
$$=4k-3$$

ただし，${}_{2(k-1)}C_2$ は $k\geqq2$ でしか定義できないので，$k=1$ のときは別にことわりを入れておく必要がある。

(2)　15 点

(エ)　$\underline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{4k-3}{n(2n-1)}\right\}^2 \text{ に 5 点}}$

(オ)　<u>答に 10 点</u>
展開，Σの分配，平方和の公式等がわかっているが，まとめる段階での計算ミスなら 5 点

(3)　20 点
(1) が合っていれば見る。

(カ)　<u>$b=k+1$ となる確率が正しくて 5 点</u>
$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ の記述がなくてもここでは，減点なし。

(キ)　<u>Σの式が正しくて 5 点</u>
Σの上限が $n-1$ になっていなければ，この点無し。

(ク)　<u>答に 10 点</u>
展開，Σの分配，平方和の公式等がわかっているが，まとめる段階での計算ミスなら 5 点。
分子分母展開していても OK。

〔4〕 ベクトル

問題

以下の問いに答えよ。

(1) 1 辺の長さが a の正四面体 ABCD の辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。辺 AB と線分 MN が垂直であることを示せ。また，線分 MN の長さを a で表せ。

(2) 座標空間内に点 E(1, 0, 0) を通り，$\vec{u}=(2,\ 2,\ 1)$ を方向ベクトルとする直線 l_1 と点 F(3, 5, −5) を通り，$\vec{v}=(2,-1,-2)$ を方向ベクトルとする直線 l_2 がある。l_1 上に点 P，l_2 上に点 Q があり，直線 PQ が l_1，l_2 の両方に垂直であるとき，P，Q の座標を求めよ。

(3) (2)の 2 直線 l_1，l_2 上に 2 点ずつとり，この 4 点で正四面体を作ることができることを示し，この 4 点の座標を求めよ。

▶ 配点　50 点

▶ 出題のねらい

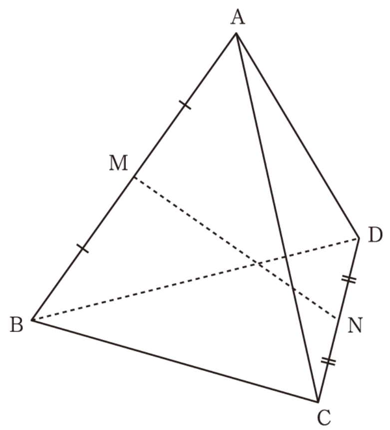
(1) 正四面体における垂直の証明と線分の長さを求めることを問う。

(2) 座標空間において，垂直条件から，ねじれの位置にある 2 直線上の点の座標を求めることができるかを問う。

(3) (1)，(2)を利用して正四面体ができることの証明と頂点の座標を求めることを問う。

▶ 解答

(1)



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおくと，

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ より，

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$$

〔4〕

(1)　15 点　(2)　15 点　(3)　20 点

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=a$ であり，

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=a^2\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a^2$$

であるから，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{b}\cdot\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{b}|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2-a^2\right)$$

$$=0$$

よって，辺 AB と線分 MN は垂直である。

（証明終わり）

また，

$$|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{4}|\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}|^2$$

$$=\frac{1}{4}\{|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{c}\cdot\vec{d}-2\vec{d}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}\}$$

$$=\frac{1}{4}(3a^2+a^2-a^2-a^2)$$

$$=\frac{1}{2}a^2$$

よって，

$$\underline{\underline{\mathrm{MN}=\frac{\sqrt{2}}{2}a}}$$ ……**(答)**

(2)　s，t を実数として，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OE}+s\vec{u}=(2s+1,\ 2s,\ s)$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OF}+t\vec{v}=(2t+3,\ -t+5,\ -2t-5)$$

と表せる。

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(2t-2s+2,\ -t-2s+5,\ -2t-s-5)$

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u}$，$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v}$ より，

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ}$$

$$=2(2t-2s+2)+2(-t-2s+5)+(-2t-s-5)$$

$$=0$$

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ}$$

$$=2(2t-2s+2)-(-t-2s+5)-2(-2t-s-5)$$

$$=0$$

これを解いて，

$$s=1,\ t=-1$$

よって，

$\mathrm{P}(3,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 6,\ -3)$ ……**(答)**

(1)　15 点

(ア)　$\overrightarrow{MN}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ で表すことに 3 点

(イ)　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ の大きさと内積に 3 点

(ウ)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}$ の計算が正しくて 4 点

(エ)　$|\overrightarrow{MN}|^2$ の展開式が正しくて 3 点

(オ)　$|\overrightarrow{MN}|$ が正しくて 2 点

(図形による証明や三平方の定理による計算の場合，解説 1°参照)

証明 10 点，MN の長さに 5 点。

証明が不十分な場合，適宜減点。

(2)　15 点

(1) と独立に採点する。

(カ)　P，Q の媒介変数表示に各 3，6 点

(キ)　2 つの内積の成分計算に各 2，4 点

(カ) ができていない場合や，$\overrightarrow{PQ}$ の成分が違っていれば，この点無し。

(ク)　P，Q の座標に 5 点

一方のみ正解なら，3 点

(3)　(2)のP，Qにおいて，

$$PQ=\sqrt{(1-3)^2+(6-2)^2+(-3-1)^2}=6$$

であるから，l_1 上にPからの距離が $3\sqrt{2}$ の距離にある2点をA，Bとし，l_2 上にQからの距離が $3\sqrt{2}$ の距離にある2点をC，Dとすると，$l_1\perp PQ$，$l_2\perp PQ$ より，

$$AQ=BQ=CP=DP=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+6^2}=3\sqrt{6}$$

である。また，

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

より，$l_1\perp l_2$ なので，$l_2\perp AP$，$l_2\perp PQ$ より，$l_2\perp AQ$ であり，同様に $l_2\perp BQ$，$l_1\perp CP$，$l_1\perp DP$ より

$$AC=AD=BC=BD$$

$$=\sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2}=6\sqrt{2}$$

$$=AB=CD$$

である。したがって，四面体ABCDは，4面がすべて正三角形であるから正四面体である。

（証明終わり）

$|\vec{u}|=|\vec{v}|=3$ であるから，

$$\overrightarrow{OP}\pm\sqrt{2}\,\vec{u}=\left(3\pm2\sqrt{2},\ 2\pm2\sqrt{2},\ 1\pm\sqrt{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ}\pm\sqrt{2}\,\vec{v}=\left(1\pm2\sqrt{2},\ 6\mp\sqrt{2},\ -3\mp2\sqrt{2}\right)$$

（複号同順）

より，4点の座標は

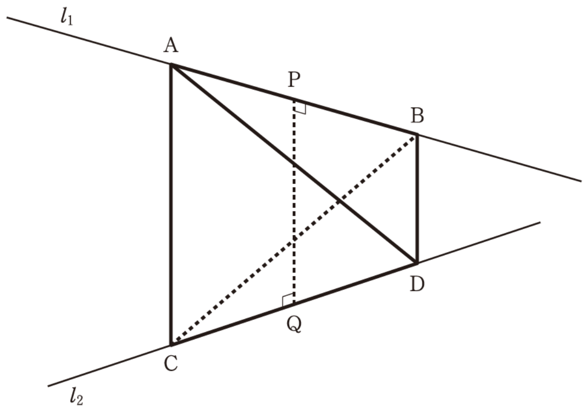
$$\left(3+2\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right),$$

$$\left(3-2\sqrt{2},\ 2-2\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}\right),$$

$$\left(1+2\sqrt{2},\ 6-\sqrt{2},\ -3-2\sqrt{2}\right),$$

$$\left(1-2\sqrt{2},\ 6+\sqrt{2},\ -3+2\sqrt{2}\right)$$

……**(答)**



(3)　20点

(2)が合っていなければ，見ない。

(ケ)　P，Qから $3\sqrt{2}$ の距離の点を求めることに気が付いて5点

(コ)　$l_1\perp l_2$ の記述に5点

(サ)　4面が正三角形を示して5点

(シ)　4点の座標が合って5点

書きミス程度なら，3点

▶ **解説**

1°　(1)の**解答**では，ベクトルを用いて内積の計算で示した。

ベクトルを使わないで示すこともできる。

△ADC と △BCD が正三角形であることから，

$$\mathrm{AN}=\mathrm{BN}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

よって，△NAB が二等辺三角形であるから，

△ANM≡△BNM より，

$$\angle\mathrm{AMN}=\angle\mathrm{BMN}=90^\circ$$

$$\mathrm{MN}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

2°　一般に定点 A を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{u}$ に平行な直線 l 上の任意の点を P とすると，t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{u}$$

で表すことができる。これを直線 l のベクトル方程式といい，$\vec{u}$ を l の方向ベクトルという。

3°　$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ であり，$\vec{u}\perp\vec{v}$，すなわち，l_1 と l_2 は垂直であるから正四面体の 4 頂点をとることができる。(2)の P，Q を(1)の M，N と捉え，$\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ とすると，$a=6\sqrt{2}$ となることがわかる。そこで，P，Q から $3\sqrt{2}$ の距離にある点をとれば，正四面体の 4 頂点となる。