2022 年度第 3 回九大本番レベル模試　採点基準

数学（理系）

〔1〕　微積分

問題

連続関数 $f(x)$ は

$$f(x)=2\int_0^x f(t)dt+xe^{2x}-2$$

を満たす。以下の問いに答えよ。

(1)　$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とするとき，$g(x)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^2 |f(x)|dx$ を求めよ。

▶ **配点　50 点**

▶ **出題のねらい**

(1)　定積分で表された関数の扱い方および，積分と微分の基本公式の理解度を問う。

(2)　絶対値で表された関数の積分と要領の良い計算ができるかを問う。

▶ **解答**

(1)　$f(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)dt+xe^{2x}-2$　……①

$g(x)=e^{-2x}f(x)$ より，

$$g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)$$
$$=e^{-2x}\{f'(x)-2f(x)\}\quad\text{……②}$$

一方，①の両辺を微分して，

$$f'(x)=2f(x)+e^{2x}+2xe^{2x}$$
$$f'(x)-2f(x)=(2x+1)e^{2x}$$

これを②に代入して，

$$g'(x)=e^{-2x}(2x+1)e^{2x}$$
$$=2x+1$$

よって，

$$g(x)=x^2+x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

①において，$x=0$ とすると，

$$f(0)=-2$$

$g(0)=f(0)$ であるから，

$$C=-2$$

よって，

$$\underline{\underline{g(x)=x^2+x-2}}\quad\text{……(答)}$$

(2)　$f(x)=e^{2x}g(x)$ より，

$$f(x)=(x^2+x-2)e^{2x}=(x+2)(x-1)e^{2x}\quad\text{……③}$$

$0<x<1$ において，$f(x)<0$ であり，
$1<x<2$ において，$f(x)>0$ であるから

〔1〕

(1)　25 点　(2)　25 点

(1)　25 点

（ア）　①の両辺の微分ができて 5 点

（イ）　$g'(x)$ を計算して 5 点

（ウ）　$g'(x)=2x+1$ を求めて 5 点

（エ）　$g(x)=x^2+x+C$ に 5 点

（オ）　答に 5 点

(2)　25 点

(1) が正しく求められていなければ点無し。

（カ）　$f(x)=(x^2+x-2)e^{2x}$ に 5 点

$$\int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

ここで,

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

であるから,

$$\int_0^2 |f(x)|dx = -2\int_0^1 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$$

①において，$x=1,\ 2$ とすると,

$$f(1) = 2\int_0^1 f(t)dt + e^2 - 2$$

$$f(2) = 2\int_0^2 f(t)dt + 2e^4 - 2$$

③より $f(1)=0,\ f(2)=4e^4$ なので,

$$\int_0^1 f(t)dt = -\frac{1}{2}e^2 + 1$$

$$\int_0^2 f(t)dt = e^4 + 1$$

よって,

$$\int_0^2 |f(x)|dx = -2\left(-\frac{1}{2}e^2+1\right) + (e^4+1)$$

$$= \underline{\underline{e^4+e^2-1}} \qquad \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

▶ 解説

1° 定積分において，上端を変数 x，下端を定数 a とするとき，次の積分と微分の関係が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

2° (2)では，絶対値を外して積分することになる。そのとき，$f(x)$ の符号を考えなければならない。積分の計算において，条件で与えられた関係式①を利用すれば，計算が省略できる。
①を使わなければ，部分積分を用いて，まず $f(x)$ の不定積分を求めればよい。
$F'(x)=f(x)$ とすると,

$$F(x) = \int (x^2+x-2)e^{2x}dx$$

$$= (x^2+x-2)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int (2x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+x-2)e^{2x} - \left\{(2x+1)\cdot\frac{1}{4}e^{2x} - \int 2\cdot\frac{1}{4}e^{2x}dx\right\}$$

(キ)　<u>1 の前後で分けて，絶対値を外せて 5 点</u>

(ク)　<u>不定積分 (解説 1°) に　5 点</u>
答までの計算に (ク)，(ケ) の 15 点が大きいので，答が合っていない場合に途中の計算が少しできていれば 5 点与えるという意味。

(ケ)　<u>答に 10 点</u>

$$=\frac{1}{4}(2x^2-5)e^{2x}+\int\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{4}(2x^2-5)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-2)e^{2x}+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

よって,

$$\int_0^2 |f(x)|dx$$

$$=-\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$=-\Big[F(x)\Big]_0^1+\Big[F(x)\Big]_1^2$$

$$=-\{F(1)-F(0)\}+\{F(2)-F(1)\}$$

$$=F(2)+F(0)-2F(1)$$

$$=e^4-1+e^2$$

$$=e^4+e^2-1$$

〔2〕 ベクトル

問題

底面は辺の長さが1の正三角形，側面は辺の長さが1の正方形の正三角柱 OAB−CDE がある。ただし，2点 O と C，A と D，B と E はそれぞれ隣り合う頂点である。辺 OA 上に点 P，辺 CE 上に点 Q があり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ とする。ただし，$0\leqq t\leqq 1$，$0\leqq s\leqq 1$ である。線分 PQ が辺 OA に垂直であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) s を t で表せ。また，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 点 R が辺 AD 上（端点を含む）にあるとき，適当な3点 P，Q，R で三角形 PQR を正三角形にできることを示せ。

▶ 配点　50点

▶ 出題のねらい

(1) 空間ベクトルを用いて，垂直条件を扱えるかを問う。

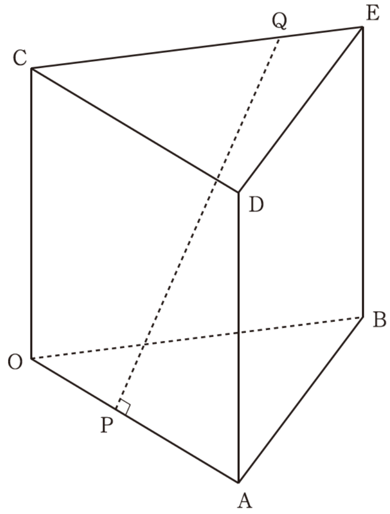
(2) 正三角形となる条件を立式し，方程式が実数解をもつ条件に帰着させることができるかを問う。

〔2〕

(1)　15点　(2)　35点

▶ 解答

(1)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos 90°=0$$

である。また，

$$\overrightarrow{OP}=t\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}=s\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=-t\vec{a}+s\vec{b}+\vec{c}$$

と表せる。$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OA}$ より，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

$$(-t\vec{a}+s\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=0$$

$$-t|\vec{a}|^2+s\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$-t+\frac{1}{2}s=0$$

$\underline{\underline{s=2t}}$ ……(答)

$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ より，t のとり得る値の範囲は

$\underline{\underline{0\leqq t\leqq \frac{1}{2}}}$ ……(答)

(1)　15点

(ア)　$\underline{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ の大きさと内積がすべて正しくて 3 点}}$

(イ)　$\underline{\overrightarrow{PQ}=-t\vec{a}+s\vec{b}+\vec{c}\text{ に 3 点}}$

(ウ)　$\underline{s=2t\text{ を求めて 6 点}}$

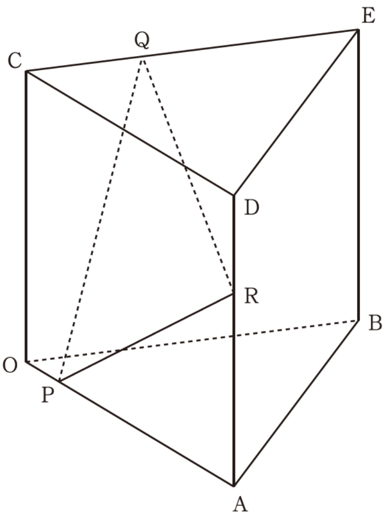
$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=(-t\vec{a}+s\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=0$ の展開が正しくて，計算ミスなら，3点。

(ア)，(イ) が間違っているなら，この点無し。

(エ)　$\underline{0\leqq t\leqq \frac{1}{2}\text{ を求めて 3 点}}$

等号ミスは 2 点。

(2)



$\overrightarrow{AR}=u\overrightarrow{AD}$　$(0\leqq u\leqq 1)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\vec{a}+u\vec{c}$$

より，

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+u\vec{c}$$
$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=\vec{a}-2t\vec{b}+(u-1)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-t\vec{a}+2t\vec{b}+\vec{c}$$

と表せる。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PR}|^2&=|(1-t)\vec{a}+u\vec{c}|^2\\&=(1-t)^2|\vec{a}|^2+u^2|\vec{c}|^2+2(1-t)u\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=(1-t)^2+u^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{QR}|^2&=|\vec{a}-2t\vec{b}+(u-1)\vec{c}|^2\\&=|\vec{a}|^2+4t^2|\vec{b}|^2+(u-1)^2|\vec{c}|^2\\&\quad-4t\vec{a}\cdot\vec{b}-4t(u-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(u-1)\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=1+4t^2+(u-1)^2-2t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2&=|-t\vec{a}+2t\vec{b}+\vec{c}|^2\\&=t^2|\vec{a}|^2+4t^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\&\qquad-4t^2\vec{a}\cdot\vec{b}+4t\vec{b}\cdot\vec{c}-2t\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=3t^2+1\end{aligned}$$

△PQR が正三角形となる条件は，PR＝QR＝PQ であるから，

$$\begin{cases}(1-t)^2+u^2=1+4t^2+(u-1)^2-2t\\(1-t)^2+u^2=3t^2+1\end{cases}$$

整理して，

$$\begin{cases}2u=3t^2+1 & \cdots\cdots①\\u^2=2t^2+2t & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①より，

$$u=\frac{3t^2+1}{2}$$

(2)　35 点

(1) で $s=2t$ が求まっていれば見る

(オ)　①，②を導いて 10 点

正三角形の条件から，3 辺の長さが等しい，または，2 辺の長さが等しく間の角が 60° からの立式に 5 点。

①, ②が導けて，さらに 5 点で 10 点。

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{1}{2} \leqq u \leqq \frac{7}{8}$$

これは，$0 \leqq u \leqq 1$ を満たす。
したがって，①，②より，

$$\left(\frac{3t^2+1}{2}\right)^2 = 2t^2+2t$$

を満たす t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲に存在することを示せばよい。整理して，

$$9t^4-2t^2-8t+1=0$$
$$(t-1)(9t^3+9t^2+7t-1)=0$$

$f(t)=9t^3+9t^2+7t-1 \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とすると，

$$f'(t)=27t^2+18t+7>0$$

より，$f(t)$ は増加関数であり，

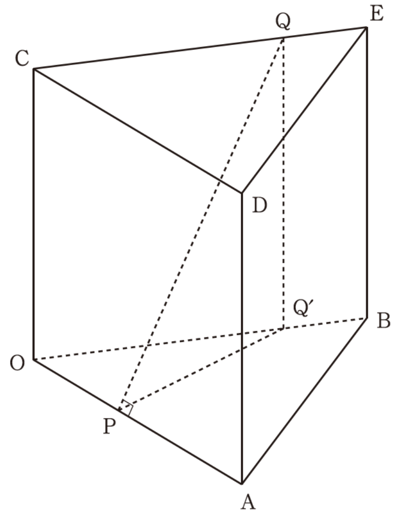
$$f(0)=-1<0$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{47}{8}>0$$

よって，$f(t)=0$ は $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲にただ 1 つの解をもつ。
以上より，三角形 PQR を正三角形にできる。

（証明終わり）

▶ **解説**

1°　Q から辺 OB に垂線を引き，OB との交点を Q′ とすると，$\angle \mathrm{OPQ'}=90°$ であり，$\mathrm{OP}=t$，$\mathrm{OQ'}=s$，$\angle \mathrm{POQ'}=60°$ であるから，$s=2t$ となる。



2°　△PQR が正三角形となる条件は，3 辺の長さが等しいとすればよいが，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}| \quad かつ$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos 60°$$

としても①，②の 2 式が得られる。

(カ)　t の 4 次方程式が導けて 5 点

(キ)　t の 3 次方程式に注目できて 5 点

(ク)　$f(t)$ の増減が調べられて 5 点

(ケ)　$f(0)$，$f(\frac{1}{2})$ の値と符号が正しくて 5 点

(コ)　$0 \leqq u \leqq 1$ を満たしていることの記述に 3 点

(サ)　証明を完結して 2 点

3°　t の 4 次方程式 $9t^4-2t^2-8t+1=0$ が $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲に解をもつことを示せばよいが，$t=1$ を代入したときに，方程式が成り立つことがわかる。したがって，左辺は $t-1$ を因数にもち，残りの 3 次式の因数について考えればよいことになる。

〔3〕 場合の数と確率

問題

図のような正八面体がある。動点Pは初めに頂点Aにあり，1秒ごとに次の規則に従って，頂点上を移動する。

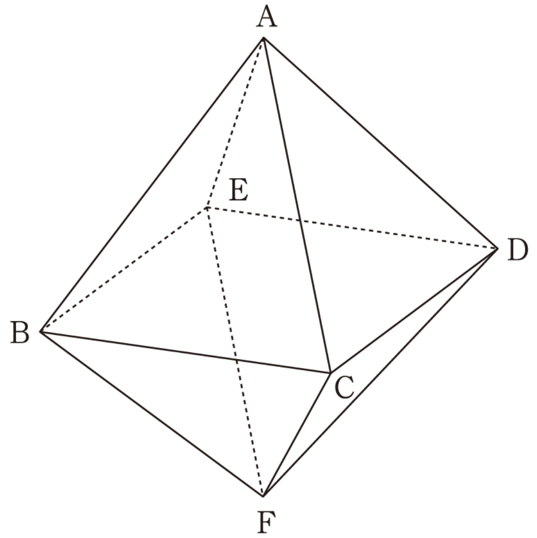
【規則】Pがある頂点にあるとき，その1秒後に確率 $\frac{1}{6}$ ずつで隣り合ういずれかの頂点に移動し，確率 $\frac{1}{3}$ で移動せず，その頂点にとどまる。

n を正の整数として，以下の問いに答えよ。

(1) Pが n 秒後にB，C，D，Eのいずれかの頂点にある確率を求めよ。

(2) Pが n 秒後に頂点Aにある確率を a_n とするとき，a_{n+1} を a_n で表し，a_n を求めよ。

(3) Pが n 秒後に頂点Bにあり，かつ，その n 秒後に頂点Dにある確率を求めよ。



▶ **配点　50点**

▶ **出題のねらい**

(1) 題意を把握し，状況の分析から確率が一定値になることがわかるかを問う。

(2) 推移の様子から漸化式を立てることおよび，基本的な漸化式の解法が理解できているかを問う。

〔3〕

(1)　15点　(2)　15点　(3)　20点

(3) 対称性の利用に気づき，効率よく確率を求めることができるかを問う。

▶ 解答

(1) PがAまたはFにあるとき，次の移動でB，C，D，Eのいずれかに移動する確率は，

$$4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

PがB，C，D，Eのいずれかにあるとき，次の移動でB，C，D，Eのいずれかにある確率は，

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

したがって，Pがいずれの頂点にあっても次の移動でB，C，D，Eのいずれかにある確率は $\frac{2}{3}$

よって，n 秒後にPがB，C，D，Eのいずれかにある確率は，

$$\underline{\underline{\frac{2}{3}}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(2) $n+1$ 秒後にPがAにあるのは，次の2つの場合がある。

・n 秒後にPがAにあって，そのままAにとどまる。

・n 秒後にPがB，C，D，Eのいずれかにあって，Aに移動する。

したがって，

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{9}$$

よって，

$$\underline{\underline{a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{9}}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

これは，

$$a_{n+1}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{1}{6}\right)$$

と変形できるから，数列 $\left\{a_n-\frac{1}{6}\right\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。

$a_1=\frac{1}{3}$ であるから，

$$a_n-\frac{1}{6}=\left(a_1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\underline{\underline{a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(3) n 秒後にPがB，C，D，Eそれぞれにある確率は等しいから，Bにある確率は，

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

(1)　15点

(ア)　<u>A(F) からB〜Eの移動の確率 $\frac{2}{3}$ に5点</u>

(イ)　<u>B〜E間での移動の確率 $\frac{2}{3}$ に5点</u>

解説1°　漸化式を作っている場合，漸化式全体に (ア) の5点。

b_n を求める変形ができて (イ) の5点。

(ウ)　<u>答に5点</u>

(2)　15点

(エ)　<u>漸化式を導く立式が正しくて5点</u>

$b_n=\frac{2}{3}$ を使っている場合，合っていなければこの点無し。

(オ)　<u>$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{9}$ を導いて5点</u>

(カ)　<u>a_n が正しくて5点</u>

$a_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{6}$ でOK。

である。

BとDの位置関係はAとFの位置関係と同じであるから，PがBにあるとき，そのn秒後にPがDにある確率は，PがAにあって，そのn秒後にFにある確率と一致する。

その確率は，(1)，(2)より，

$$1-\frac{2}{3}-\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\right\}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}$$

であるから，求める確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\right\}=\underline{\underline{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{36}}}$$

……**(答)**

▶ 解説

1°　(1)を漸化式を用いて解くこともできる。a_nと同様に，n秒後にPがB，C，D，Eのいずれかにある確率をb_n，Fにある確率をc_nとすると，

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{6}b_n$$

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n+\frac{2}{3}c_n$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{3}c_n$$

である。また，

$$a_n+b_n+c_n=1$$

であるから，

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}$$

となり，$b_1=\frac{2}{3}$ であるから，

$$b_n=\frac{2}{3}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である。

2°　p，qを定数として，$p\neq1$とするとき，漸化式$a_{n+1}=pa_n+q$は，$\alpha=p\alpha+q$を満たすαを用いて，

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

と変形できる。この式から，数列$\{a_n-\alpha\}$が公比pの等比数列であることがわかり，その一般項から，a_nが求められる。解答では，$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}$ としてあるが，これは，$a_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{6}$ としても構わない。

3°　AとFに対して，B，C，D，Eは対等な位置関係にあるので，B，C，D，Eのどの頂点に移動する確率も等しい。

4°　Aと隣り合わない頂点がFであり，Bと隣り合わない頂点がDである。したがって，PがAから移動し始めて，n秒後にFにある確率とBから移

(3)　20点

(キ)　<u>n秒後にBにある確率が求められて5点</u>

(ク)　<u>Bからn秒後にDに移動する確率が求められて10点</u>

発想が正しいが計算ミスなら5点。

(ケ)　<u>答に5点</u>

整理の仕方によって表し方が変わるが，未整理でなければ，OK。

未整理なら2点減点。

動し始めて，n 秒後に D にある確率は同じである。すなわち，**解説** 1° $\{c_n\}$ の一般項であって，漸化式から求めると，

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{9}$$

であり，これは $\{a_n\}$ が満たす漸化式と同じであるから，

$$c_n-\frac{1}{6}=\left(c_1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となり，$c_1=0$ であるから，

$$c_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}$$

となる。

〔4〕 複素数平面

問題

0でない複素数zの偏角をθ $(0<\theta<\pi)$とする。zが次の条件(＊)を満たしながら動くとする。

(＊)　$\overline{z}-\dfrac{i}{z^2}$は実数である。

以下の問いに答えよ。

(1)　θのとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　$|z|$のとり得る値の範囲を求めよ。

▶ 配点　50点

▶ 出題のねらい

(1)　複素数の極形式による計算と複素数が実数である条件の理解度を問う。

(2)　三角関数で表された関数のとり得る値の範囲が求められるかを問う。

▶ 解答

(1)　$|z|=r$ (>0)とおくと，

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

であり，

$$\overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$\frac{i}{z^2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}{r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{r^2}(\sin 2\theta+i\cos 2\theta)$$

であるから，

〔4〕

(1)　30点　(2)　20点

(1)　30点

(ア)　<u>zの極形式と$\overline{z}$に5点</u>

zのみなら，2点。

$\overline{z}$は，zの虚部の符号違いでOK。

(イ)　<u>$\dfrac{i}{z^2}$の極形式に5点</u>

$$\frac{1}{r^2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$

または，$\dfrac{1}{r^2}(\sin 2\theta+i\cos 2\theta)$ができていれば5点。

$$\overline{z}-\frac{i}{z^2}=\left(r\cos\theta-\frac{1}{r^2}\sin 2\theta\right)$$

$$-i\left(r\sin\theta+\frac{\cos 2\theta}{r^2}\right)$$

$\overline{z}-\dfrac{i}{z^2}$ が実数である条件は，

$$r\sin\theta+\frac{\cos 2\theta}{r^2}=0$$

$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta\fallingdotseq 0$ であるから，

$$r^3=-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$$

$r^3>0$ より，

$$-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}>0$$

$\sin\theta>0$ であるから，

$$\cos 2\theta<0$$

$0<2\theta<2\pi$ より，

$$\frac{\pi}{2}<2\theta<\frac{3\pi}{2}$$

よって，θ のとり得る値の範囲は，

$$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}$$ ……(答)

(2)　$r^3=-\dfrac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta}=2\sin\theta-\dfrac{1}{\sin\theta}$

$t=\sin\theta$ とおくと，

$$r^3=2t-\frac{1}{t}$$

$$\frac{d}{dt}r^3=2+\frac{1}{t^2}>0$$

よって，r^3 は増加関数であり，(1)より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<t\leqq 1$ であるから，

$$0<r^3\leqq 1$$

したがって，r すなわち $|z|$ のとり得る値の範囲は

$$0<|z|\leqq 1$$ ……(答)

▶ 解説

1°　θ のとり得る値の範囲は，複素数 z が実数である条件，

$$(z\text{ の虚部})=0$$

から，r と θ の関係式が得られ，$r>0$ であることから求められる。なお，複素数 z が実数である条件は，

$$z=\overline{z}$$

とも表わせるが，本問では偏角の範囲を求めるので極形式で表して処理した。

2°　0 でない複素数 z を極形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ で表したとき，共役な複素数 $\overline{z}$ は

$$\overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

(ウ)　$\overline{z}-\dfrac{i}{z^2}$ の虚部が正しくて 5 点

(エ)　$r^3=-\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ が導けて 5 点

(オ)　$\cos 2\theta<0$ が導けて 5 点

(カ)　答に 5 点

(2)　20 点

(1) で r^3 が合っていれば見る。

(カ)　r^3 の微分に 5 点

(キ)　r^3 の増減に 5 点

(ク)　$t(=\sin\theta)$ の範囲に 5 点

等号ミスは 3 点。

(ケ)　答に 5 点

等号ミスは 2 点。

$$=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

であり，$\dfrac{i}{z^2}$ は

$$\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}=\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)$$

とド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

(n は整数)

を用いて計算している。

3° (2)では，$r^3=-\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ から，$|z|$ すなわち r のとり得る値の範囲を求めることになる。$-\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ が $\sin\theta$ のみで表されることから，$\sin\theta=t$ と置き換えて考えればよい。解答では，(1)の結果から $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<t\leqq 1$ であることに注意して，微分して増減を調べている。微分しなくても，$2t$，$-\dfrac{1}{t}$ がともに増加関数であるから，$2t-\dfrac{1}{t}$ は増加関数であることがわかる。

また，置き換えないで，三角関数のまま微分すると，次のようになる。

$f(\theta)=2\sin\theta-\dfrac{1}{\sin\theta}$ とおくと，

$$f'(\theta)=2\cos\theta+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta(2\sin^2\theta+1)}{\sin^2\theta}$$

$f'(\theta)=0$ となるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のときであり，$f(\theta)$ の増減は

θ	$\frac{\pi}{4}$	……	$\frac{\pi}{2}$	……	$\frac{3\pi}{4}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	↗	1	↘	0

となる。したがって，$f(\theta)$ のとり得る値の範囲は，

$$0<f(\theta)\leqq 1$$

である。

〔5〕 極限，積分法

問題

$f(x)=\sqrt{x^2-1}+x$ とする。曲線 $y=f(x)$ の $x\geqq 1$ の部分を C とし，直線 $y=ax$ を l とする。定数 a が $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=0$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) C と 3 直線 l，$x=1$，$x=t$ $(t>1)$ によって，囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{t\to\infty}\dfrac{V(t)}{t}$ を求めよ。

▶ 配点　50 点

▶ 出題のねらい

(1)，(3) 不定形を解消して，極限を求めることができるかを問う。

(2) 定積分により回転体の体積を求めることができるかを問う。

▶ 解答

(1) $f(x)-ax=\sqrt{x^2-1}+(1-a)x$

$a\leqq 1$ のとき，$1-a\geqq 0$ であるから，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=\infty$$

となり，題意を満たさない。したがって，$a>1$ である。

このとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}&=\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2-1}-(a-1)x\right\}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-(a-1)^2x^2}{\sqrt{x^2-1}+(a-1)x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{a(2-a)x^2-1}{\sqrt{x^2-1}+(a-1)x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{a(2-a)x-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+(a-1)}\end{aligned}$$

$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+(a-1)\right\}=a$ なので，

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=0$ となるのは

$$a(2-a)=0$$

のときである。$a>1$ なので，

$\underline{\underline{a=2}}$ ……(答)

〔5〕

(1)　15 点　(2)　25 点　(3)　10 点

(1)　15 点

(ア)　$a>1$ が必要に気が付いて 5 点

(イ)　不定形の解消の計算に 5 点

(ア) ができていなくても見る。

$\dfrac{a(2-a)x-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+(a-1)}$ までの変形に 5 点

その上の行までなら，3 点。

(ウ)　答に 5 点

$a=0$，2 なら，この点無し。

$a=0$ が不適当な理由が正しければ，ここで (ア) の 5 点を与える。

理由が不明確なら，(ア)，(ウ) の点無し。

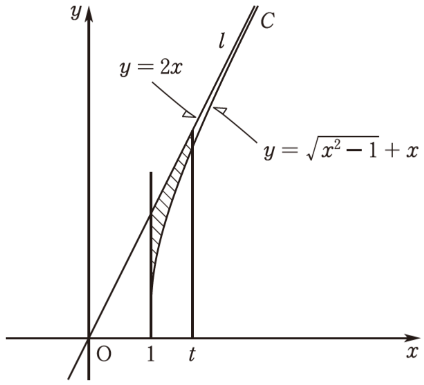
(2) 以降はみる。

である。

(2)　(1)の計算より，$f(x)-2x=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}<0$

よって，$0<f(x)<2x$ であるから，

$$\begin{aligned}V(t)&=\pi\int_1^t\left\{(2x)^2-\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)^2\right\}dx\\&=\pi\int_1^t\left\{4x^2-\left(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}\right)\right\}dx\\&=\pi\int_1^t\left\{2x^2-2x\sqrt{x^2-1}+1\right\}dx\\&=\pi\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+x\right]_1^t\\&=\underline{\underline{\pi\left\{\frac{2}{3}t^3-\frac{2}{3}(t^2-1)^{\frac{3}{2}}+t-\frac{5}{3}\right\}}}\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$



(3)

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t}\\&=\lim_{t\to\infty}\pi\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3-(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{t}+1-\frac{5}{3t}\right\}\\&=\lim_{t\to\infty}\pi\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{t^6-(t^2-1)^3}{t\{t^3+(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\}}+1-\frac{5}{3t}\right\}\\&=\lim_{t\to\infty}\pi\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{3t^4-3t^2+1}{t\{t^3+(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\}}+1-\frac{5}{3t}\right\}\\&=\lim_{t\to\infty}\pi\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{3-\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^4}}{1+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}}+1-\frac{5}{3t}\right\}\\&=\pi\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}+1\right)\\&=\underline{\underline{2\pi}}\qquad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

▶ 解説

1°　l は C の漸近線である。一般に，$y=f(x)$ に対して，

(2)　25点

(1) で，$a=2$ が出ていれば見る。

(エ)　$V(t)$ の立式が正しくて5点

π 抜けは3点。

上下関係が間違っていれば，点無し。

(オ)　被積分関数を整理して5点

積分できる形，$2x^2+1-2x\sqrt{x^2-1}$ が出てればOK。

π 抜けは減点なし。

(カ)　不定積分が正しくて10点，答に5点

π 抜けは答の部分で，2点引き。

(エ)，(カ) での2点ずつの減点。

(3)　10点

$V(t)$ が合っていれば見る。π 抜けも見る。

(キ)　不定形の解消に5点

π 抜けは3点。

(ク)　答に5点

π 抜けは3点。

不定形が解消できていなければ，答が合っていても点無し。

$\lim_{x\to\infty}\{y-(ax+b)\}=0$，または

$\lim_{x\to-\infty}\{y-(ax+b)\}=0$ が成り立つとき，直線

$y=ax+b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

2° $f(x)-2x<0$ であることから，C と l の上下関係が判断できる。

3° 連続関数 $f(x)$，$g(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ において，$0\leqq g(x)\leqq f(x)$ を満たすとき，この範囲において，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の間の部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は

$$\pi\int_a^b[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]dx$$

である。