２０２１年　千葉大学・本番レベル模試・数学

解答・採点基準

$\boxed{1}$　（５０点）

【解答・採点基準】

(1)

0以上の整数kを用いて$\sqrt{n^2-60}=k$とおく。このとき，

$$\sqrt{n^2-60}=k$$
$$\Leftrightarrow n^2-60=k^2$$
$$\Leftrightarrow (n-k)(n+k)=60$$

となる。ここで，$n>\sqrt{n^2-60}=k$より，$0<n-k<n+k$である。また，

$n,\ k$が整数かつ$(n+k)-(n-k)=2k$より，$n-k,\ n+k$の偶奇が一致することから，

$$(n-k,\ n+k)=(2,\ 30),\ (6,\ 10) \Leftrightarrow (n,\ k)=(16,\ 14),\ (8,\ 2)$$

となる。したがって，求める答えは$n=8,\ 16$とわかる。

(答)　$n=8,\ 16$

(2)

整数lを用いて$\sqrt{n^2-3n+60}=n+l$とおく。ここで，

$$n^2-3n+60=\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{231}{4}$$

であり，数直線上で$\frac{3}{2}$に関して対称である実数$a,\ b$について

$$\frac{a+b}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a+b=3$$

となるから，$a,\ b$いずれかが整数であればもう一方も整数となる。

(1)　15点

$\sqrt{n^2-60}=k$とおく‥3点

$(n-k)(n+k)=60$を示す‥4点

$(2,\ 30),\ (6,\ 10)$‥3点

答‥5点

(2)　35点

$\frac{3}{2}$に関して対称‥3点

$n>\frac{3}{2}$の場合を考

よって，まず $n>\frac{3}{2}$ の場合について考える。このとき，

$$n-\frac{3}{2}<\sqrt{\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{231}{4}}=n+l$$

となるから，$l>-\frac{3}{2}$ である。$\sqrt{n^2-3n+60}=n+l$ の両辺を二乗して

$$n^2-3n+60=n^2+2nl+l^2$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{60-l^2}{2l+3}\left(\because l>-\frac{3}{2}\right)$$

である。ここで $n>0,\ 2l+3>0$ より，

$$60-l^2>0\Leftrightarrow -\sqrt{60}<l<\sqrt{60}$$

であるから，

$$60-l^2>0 \text{ かつ } l>-\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\frac{3}{2}<l<\sqrt{60}$$

とわかる。したがって，$n=\frac{60-l^2}{2l+3}$ に $l=-1,\ 0,\ \cdots,\ 7$ を代入して n が整数となるのは，$l=-1,\ 0,\ 2,\ 4$ のときで，それぞれ $n=59,\ 20,\ 8,\ 4$ であり，これは $n>\frac{3}{2}$ を満たす。よって，$n<\frac{3}{2}$ のときは，$n>\frac{3}{2}$ の場合で求めた n に対して，数直線上で $\frac{3}{2}$ に関して対称である整数が求める解であるから，$n=-56,\ -17,\ -5,\ -1$ となる。したがって，求める答えは，$n=-56,\ -17,\ -5,\ -1,\ 4,\ 8,\ 20,\ 59$ とわかる。

(答)　$n=-56,\ -17,\ -5,\ -1,\ 4,\ 8,\ 20,\ 59$

(2)[別解]

$n^2-3n+60=\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{231}{4}>0$ であるから，自然数 l を用いて

$$\sqrt{n^2-3n+60}=l$$

とおく。このとき

えれば十分と示す

・・3 点

$n-\frac{3}{2}<n+l$ **・・4 点**

$l>-\frac{3}{2}$ **・・3 点**

$n=\frac{60-l^2}{2l+3}$ **・・5 点**

$-\sqrt{60}<l<\sqrt{60}$

・・3 点

$-\frac{3}{2}<l<\sqrt{60}$

・・3 点

$n=59,\ 20,\ 8,\ 4$

・・4 点

$n>\frac{3}{2}$ **の確認**

・・3 点

$n=-56,\ -17,\ -5$

$,\ -1$ **・・4 点**

(2)別解　35 点

$\sqrt{n^2-3n+60}=l$

・・3 点

$$\sqrt{n^2-3n+60}=l$$
$$\Leftrightarrow n^2-3n+60=l^2$$
$$\Leftrightarrow l^2-\left(n-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{231}{4}$$
$$\Leftrightarrow (2l)^2-(2n-3)^2=231$$
$$\Leftrightarrow (2l-2n+3)(2l+2n-3)=231$$

とできる。ここで,

$$231=3\cdot 7\cdot 11$$

であり,

$$(2l-2n+3)+(2l+2n-3)=4l>0$$

であることから, $(2l-2n+3)(2l+2n-3)>0$ と合わせて $2l-2n+3,\ 2l+2n-3>0$ とわかる。よって,

$$(2l-2n+3,\ 2l+2n-3)=(1,\ 231),\ (3,\ 77),\ (7,\ 33),\ (11,\ 21),\ (21,\ 11),\ (33,\ 7),\ (77,\ 3),\ (231,\ 1)$$

となる。したがって,

$$(n,\ l)=(59,\ 58),\ (20,\ 20),\ (8,\ 10),\ (4,\ 8),\ (-1,\ 8),\ (-5,\ 10),\ (-17,\ 20),\ (-56,\ 58)$$

とわかるから,求める n は

$$n=-56,\ -17,\ -5,\ -1,\ 4,\ 8,\ 20,\ 59$$

となる。

(答) $n=-56,\ -17,\ -5,\ -1,\ 4,\ 8,\ 20,\ 59$

因数分解・・3 点

素因数分解・・3 点

和が正・・3 点

積が正・・3 点

どちらも正・・4 点

$2l-2n+3$ と $2l+2n-3$ の値・・8 点

(各 1 点×8)

答・・8 点

(各 1 点×8)

$\boxed{2}$ （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

条件式より，

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=9 \\ \left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=9 \\ 4\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=0 \\ -4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=4 \end{cases}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=2\ \left(\because \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|>0\right)$$

である。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=2$

(2)

まず，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を求める。点 F は線分 AD 上にあるから，実数 $s\,(0\leqq s\leqq 1)$を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表すことができる。(1)の結果から

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|^2&=s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+4s(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4(1-s)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\&=17s^2-24s+16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=s\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+2(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=5s+2\end{aligned}$$

であるから，三角形 OAF の面積を△ OAF と書くと

$$\triangle\,\mathrm{OAF}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)^2}$$

(1)　15 点

条件式を 2 乗して

・・5 点

答

・・5 点(各 5 点×2)

(2)　20 点

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\left(17s^2-24s+16\right)-\left(25s^2+40s+16\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{128\left(s-1\right)^2}$$
$$=4\sqrt{2}\left(1-s\right)\quad(\because 0\leqq s\leqq 1)$$

となる。ここで条件より，

$$4\sqrt{2}\left(1-s\right)=\frac{16\sqrt{2}}{5}$$
$$\therefore s=\frac{1}{5}$$

が得られる。したがって，

s を求めて‥10 点

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を求めて‥5 点

となるから，点 E が線分 AB 上の点であることより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。

(答)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

答‥5 点

(2)[別解]

(2)［別解］　20 点

条件より，三角形 OAD の面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 16-16}$$
$$=4\sqrt{2}$$

である。ここで，三角形の辺の比から，

$$\mathrm{AF}:\mathrm{AD}=\triangle\mathrm{OAF}:\triangle\mathrm{OAD}=\frac{4}{5}:1$$

面積比を利用して‥5 点

が成り立つから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を求めて‥5 点

が得られる。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を求めて‥5 点

となるから，点 E が線分 AB 上の点であることより，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{9}\overrightarrow{OB}$$

である。

(答) $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{9}\overrightarrow{OB}$

答‥5 点

(3)

(3) 15 点

(2)より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{9}\overrightarrow{OB}\\&=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\cdot2\overrightarrow{OB}\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}}{2+1}\end{aligned}$$

であるから，点 G は線分 CD を $2:1$ に内分する点である。いま，

点 G は線分 CD を $2:1$ に内分することを求めて‥5 点

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot2\overrightarrow{OB}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=2\end{aligned}$$

であることより，三角形 OCD の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\left|\overrightarrow{OD}\right|^2-\left(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\right)^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}\cdot16-4}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

三角形 OCD の面積を求めて‥5 点

であるから，三角形 ODG の面積は，

$$2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。

(答) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

答‥5 点

(3)[別解]

(3)[別解] 15 点

三角形 OAF と直線 CD について，メネラウスの定理より，

$$\frac{OG}{GF}\cdot\frac{FD}{DA}\cdot\frac{AC}{CO}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{OG}{GF}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1}=1$$

メネラウスの定理から $OG:GF$ を求めて‥5 点

であるから，$OG:GF=5:1$ である。したがって，三角形 ODG の面積は，

$$\triangle \mathrm{ODG} = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}} \triangle \mathrm{ODF}$$

$$= \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}} \cdot \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AD}} \triangle \mathrm{OAD}$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 4\sqrt{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。

(答) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

三角形 ODG の面積を三角形 OAD の面積で正しく表せて‥5 点

答‥5 点

$\boxed{3}$ （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

放物線 C の式を $y=f(x)$ とおく。直線 l_1 の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$\Leftrightarrow y=(-2t)(x-t)-t^2+4$$
$$\Leftrightarrow y=-2tx+t^2+4$$

となる。同様にして，直線 l_2 の方程式は

$$y=-2(t+2)x+(t+2)^2+4$$
$$\Leftrightarrow y=-2(t+2)x+t^2+4t+8$$

となる。したがって，直線 l_1, l_2 の共有点の x 座標は

$$-2(t+2)x+t^2+4t+8=-2tx+t^2+4$$
$$\Leftrightarrow x=t+1$$

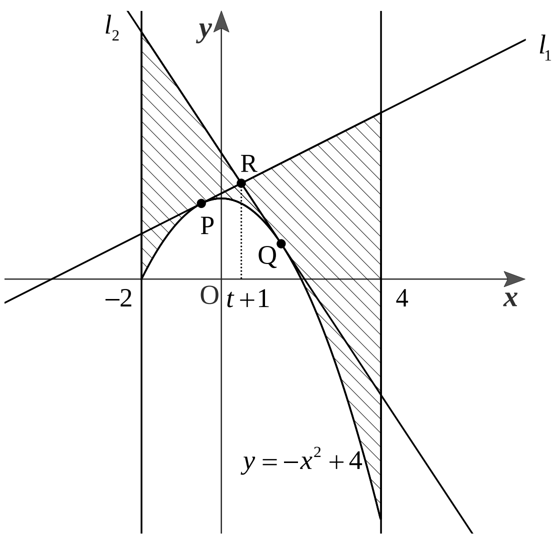
であるから，y 座標は，

$$y=-2t(t+1)+t^2+4=-t^2-2t+4$$

とわかる。したがって，求める座標は $(t+1,\ -t^2-2t+4)$ である。

(答) $(t+1,\ -t^2-2t+4)$

(2)



(1)　18 点

l_1 の式‥3 点

l_2 の式‥3 点

交点の x 座標
‥6 点

交点の y 座標
‥6 点

(2)　32 点

求める面積は上図の斜線部分の領域の面積である。その面積を S とすれば，

$$S=\int_{-2}^{t+1}\left\{-2(t+2)x+t^2+4t+8-\left(-x^2+4\right)\right\}dx$$
$$+\int_{t+1}^{4}\left\{-2tx+t^2+4-\left(-x^2+4\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-2}^{t+1}\left\{x-(t+2)\right\}^2dx+\int_{t+1}^{4}(x-t)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\left\{x-(t+2)\right\}^3\right]_{-2}^{t+1}+\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{t+1}^{4}$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(t+4)^3+\frac{1}{3}(4-t)^3-\frac{1}{3}$$
$$=8t^2+42$$

とわかる。ここで，

$-2\leqq t\leqq 4$ かつ $-2\leqq t+2\leqq 4$

$\Leftrightarrow -2\leqq t\leqq 2$

であるから，最小値は $t=0$ のとき

$8\cdot 0^2+42=42$

であり，最大値は $t=-2,\ 2$ のとき

$8\cdot 2^2+42=74$

とわかる。

(答) 最小値 42，最大値 74

面積の立式‥6 点

$8t^2+42$ **‥6 点**

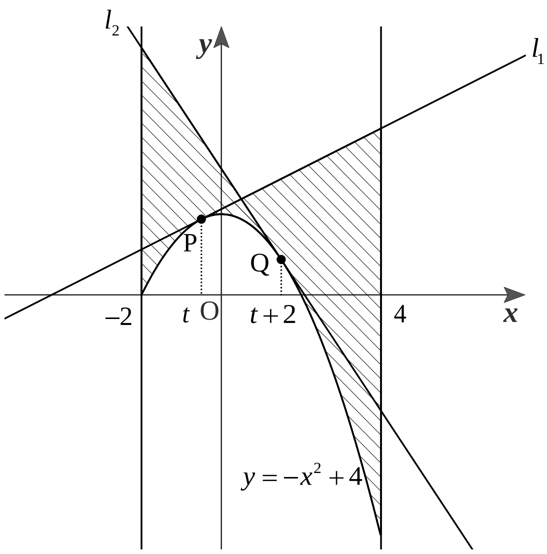
t の範囲‥6 点

最小値‥7 点

最大値‥7 点

(2)[別解]

(2)［別解］ 32 点



求める面積は上図の斜線部分の領域の面積である。その面積を S

とすれば,

$$S=\int_{-2}^{t+2}\left\{-2(t+2)x+t^2+4t+8-\left(-x^2+4\right)\right\}dx$$
$$+\int_{t}^{4}\left\{-2tx+t^2+4-\left(-x^2+4\right)\right\}dx$$
$$-\int_{t}^{t+1}\left\{-2tx+t^2+4-\left(-x^2+4\right)\right\}dx$$
$$-\int_{t+1}^{t+2}\left\{-2(t+2)x+t^2+4t+8-\left(-x^2+4\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-2}^{t+2}\left\{x-(t+2)\right\}^2dx+\int_{t}^{4}(x-t)^2dx$$
$$-\int_{t}^{t+1}(x-t)^2dx-\int_{t+1}^{t+2}\left\{x-(t+2)\right\}^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\left\{x-(t+2)\right\}^3\right]_{-2}^{t+2}+\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{t}^{4}$$
$$-\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{t}^{t+1}-\left[\frac{1}{3}\left\{x-(t+2)\right\}^3\right]_{t+1}^{t+2}$$
$$=\frac{1}{3}(t+4)^3+\frac{1}{3}(4-t)^3-\frac{1}{3}\cdot1^3+\frac{1}{3}\cdot(-1)^3$$
$$=8t^2+42$$

面積の立式‥6 点

$8t^2+42$‥6 点

とわかる。ここで,

$$-2\leqq t\leqq4 \text{ かつ } -2\leqq t+2\leqq4$$
$$\Leftrightarrow -2\leqq t\leqq2$$

t の範囲‥6 点

であるから,$t=0$ のとき最小値

$$8\cdot0^2+42=42$$

最小値‥7 点

をとり,$t=-2,\ 2$ のとき最大値

$$8\cdot2^2+42=74$$

最大値‥7 点

をとる。

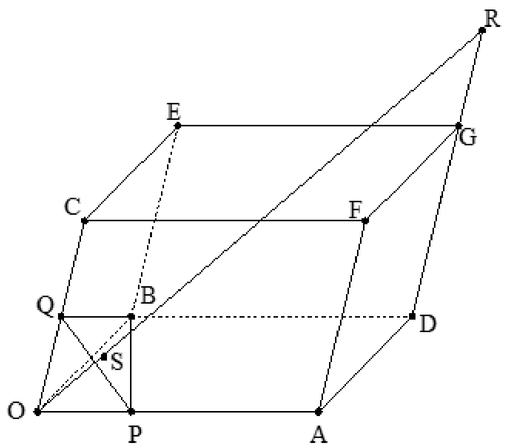
(答) 最小値 42,最大値 74

$\boxed{4}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

平行六面体 OADB－CFGE と点 P, Q, R, S を図示すると以下のようになる。



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$$

である。ここで，点 S は直線 OR 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=k\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\&=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{3k}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。また，点 S は平面 PBQ 上の点であるから，実数 α, β, γ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ (\alpha+\beta+\gamma=1)$ と表すことができる。したがって，

(1)　30 点

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表す‥6 点

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ とおいて‥6 点

実数 α, β, γ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ (\alpha+\beta+\gamma=1)$ とおいて‥6 点

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{3k}{2}\vec{c}$$
$$=3k\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right)+k\vec{b}+3k\left(\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$
$$=3k\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

である。ここで，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が1次独立であることから $3k+k+3k=1$ となる。よって，$k=\frac{1}{7}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{3}{14}\vec{c}$ となる。

$k=\frac{1}{7}$ ･･6 点

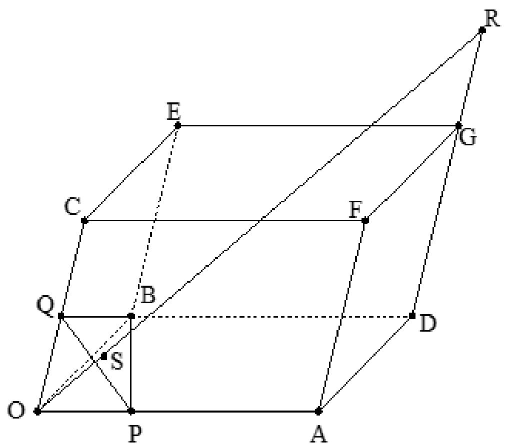
(答) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{3}{14}\vec{c}$

答･･6 点

(1)[別解]

(1)[別解]　30 点

平行六面体 OADB−CFGE と点 P, Q, R, S を図示すると以下のようになる。



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表す･･6 点

である。ここで，点 S は直線 OR 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$
$$=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{3k}{2}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ とおいて･･6 点

となる。また，点 S は平面 PBQ 上の点であるから，実数 s, t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PS}}=s\overrightarrow{\mathrm{PB}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と表すことができる。したがって，

実数 s, t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PS}}=s\overrightarrow{\mathrm{PB}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とおいて･･6 点

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PS}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PB}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\\&=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\frac{1-s-t}{3}\vec{a}+s\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

である。$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が1次独立であることからこれと

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{3k}{2}\vec{c}$ の係数を比較すると，

$$\begin{cases}\dfrac{1-s-t}{3}=k\\ s=k\\ \dfrac{t}{2}=\dfrac{3k}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7k=1\\ s=k\\ t=3k\end{cases}$$

となる。よって，$k=\frac{1}{7}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{3}{14}\vec{c}$ となる。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{3}{14}\vec{c}$

$k=\frac{1}{7}$ ･･6 点

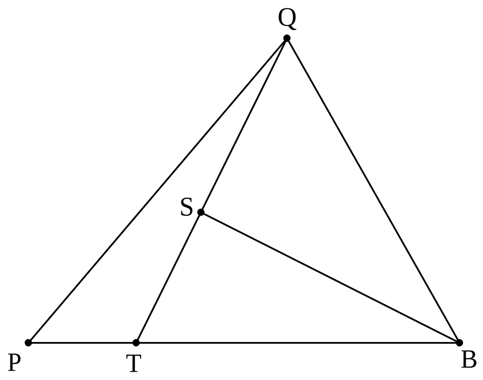
答･･6 点

(2)

(2)　30 点

点Sは平面 PBQ 上にあるから，三角形 SBQ と三角形 PBQ は同一平面上にある。よって，(1)の図より四面体 OSBQ，四面体 OPBQ の底面をそれぞれ三角形 SBQ，三角形 PBQ とすると，この2つの四面体の高さは等しい。したがって，四面体 OSBQ と四面体 OPBQ の体積比は三角形 SBQ と三角形 PBQ の面積比に一致する。ここで，三角形 PBQ について，直線 QS と直線 PB の交点を T として図示すると以下のようになる。

三角形 SBQ と三角形 PBQ の面積比に一致する･･6 点



ここで, (1)より,

$$\overrightarrow{OS}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QS}=\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{OQ}+\frac{3}{7}\overrightarrow{QP}\right)+\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{OQ}+\frac{1}{7}\overrightarrow{QB}\right)+\frac{3}{7}\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QS}=\frac{3}{7}\overrightarrow{QP}+\frac{1}{7}\overrightarrow{QB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QS}=\frac{4}{7}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{QP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{QB}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{QS}=\frac{4}{7}\overrightarrow{QT},\ \overrightarrow{QT}=\frac{3}{4}\overrightarrow{QP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{QB}$$

であることから, $\mathrm{PT}:\mathrm{TB}=1:3,\ \mathrm{QS}:\mathrm{QT}=4:7$ とわかる。したがって,

$$(\text{三角形 TBQ の面積})=\frac{3}{4}\cdot(\text{三角形 PBQ の面積})$$

$$(\text{三角形 SBQ の面積})=\frac{4}{7}\cdot(\text{三角形 TBQ の面積})$$

となるので,

$$(\text{三角形 SBQ の面積}):(\text{三角形 PBQ の面積})=3:7$$

である。よって, 四面体 OSBQ と四面体 OPBQ の体積比は 3:7 となる。

(答) (四面体 OSBQ の体積):(四面体 OPBQ の体積)$=3:7$

$\overrightarrow{QS}=\frac{3}{7}\overrightarrow{QP}+\frac{1}{7}\overrightarrow{QB}$ ‥6 点

$\triangle\mathrm{TBQ}=\frac{3}{4}\cdot\triangle\mathrm{PBQ}$

‥6 点

$\triangle\mathrm{SBQ}=\frac{4}{7}\cdot\triangle\mathrm{TBQ}$

‥6 点

答‥6 点

$\boxed{5}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

$x \geqq 0$ のとき，

$$e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore e^{-x} \leqq \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}} \quad \left(\because 1+x+\frac{x^2}{2}>0\right)$$

$$\therefore xe^{-x} \leqq \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}} \quad (\because x \geqq 0)$$

となる。よって，$x \geqq 0$ のとき，

$$0 \leqq f(x) \leqq \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$$

が成り立つ。ここで，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2}}=0$$

となるから，はさみうちの原理より $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ となる。

また，$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty$ より，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ となる。

(答) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(1)　18点

はさみうちの原理‥6点

答‥12点

(各6点×2)

(2)

$$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot\left(-e^{-x}\right)$$
$$=(1-x)e^{-x}$$

より，$f(x)$ の増減は下表のようになる。

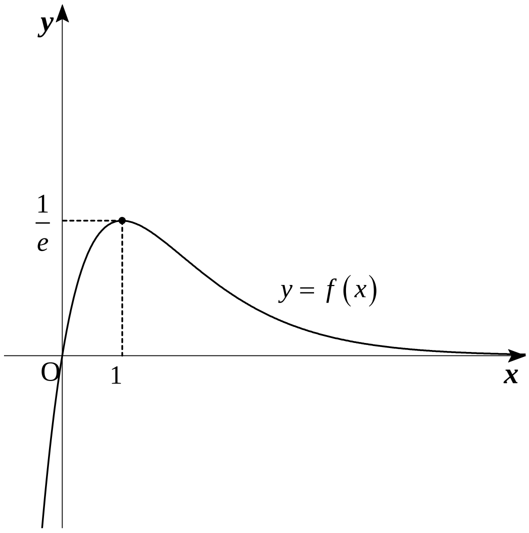
(2)　18点

$f'(x)$‥6点

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

増減表・・6 点

これと(1)の結果より，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



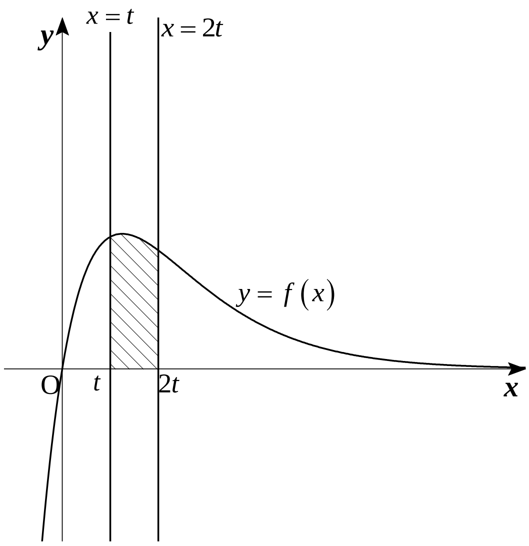
(答) 前図

答・・6 点

(3)

(3)　24 点

x 軸のまわりに回転させる領域は下図の斜線部分である。



よって,

$$V(t)=\pi\int_t^{2t}\left(xe^{-x}\right)^2dx$$

$V(t)$ を立式して・・6 点

となる。ここで，$h(x)=\left(xe^{-x}\right)^2$ とし，$h(x)$ の原始関数の1つを

$H(x)$ とすると,

$$V(t)=\pi\left[H(x)\right]_t^{2t}$$
$$=\pi\{H(2t)-H(t)\}$$

となる。よって,

$$V'(t)=\pi\{2\cdot h(2t)-h(t)\}$$
$$=\pi\left(8t^2e^{-4t}-t^2e^{-2t}\right)$$
$$=\pi t^2e^{-4t}\left(8-e^{2t}\right)$$

となるから，$V'(t)=0$ を解くと

$V'(t)$‥6 点

$$8-e^{2t}=0$$
$$\therefore 2t=\log 8$$
$$\therefore t=\frac{3}{2}\log 2$$

より，$t>0$ における $V(t)$ の増減は下表のようになる。

t	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}\log 2$	$\cdots$
$V'(t)$		$+$	0	$-$
$V(t)$		↗	極大	↘

増減表‥6 点

したがって，$V(t)$ が最大となる t の値は $\frac{3}{2}\log 2$ である。

(答) $\frac{3}{2}\log 2$

答‥6 点

(3)[別解] ($V'(t)$ を得る部分)

(3)[別解]　24 点

$V(t)$ を立式して

‥6 点

$$V(t)=\pi\int_t^{2t}\left(xe^{-x}\right)^2dx$$
$$=\pi\int_t^{2t}x^2e^{-2x}dx$$
$$=\pi\left(\left[-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\right]_t^{2t}+\int_t^{2t}xe^{-2x}dx\right)$$
$$=\pi\left(\left[-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\right]_t^{2t}+\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_t^{2t}+\int_t^{2t}\frac{1}{2}e^{-2x}dx\right)$$
$$=\pi\left(\left[-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\right]_t^{2t}+\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_t^{2t}+\left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_t^{2t}\right)$$
$$=\pi\left\{\left(-2t^2-t-\frac{1}{4}\right)e^{-4t}+\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)e^{-2t}\right\}$$

となるから,

$$V'(t)=\pi\left[\left\{-4\left(-2t^2-t-\frac{1}{4}\right)+(-4t-1)\right\}e^{-4t}\right.$$
$$\left.+\left\{-2\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)+\left(t+\frac{1}{2}\right)\right\}e^{-2t}\right]$$
$$=\pi\left(8t^2e^{-4t}-t^2e^{-2t}\right)$$
$$=\pi t^2e^{-4t}\left(8-e^{2t}\right)$$

となる。

$V'(t)$ ··6 点

$\boxed{6}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&a_{n+2}-(a_{n+1}+a_n)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n\left(\alpha^2-\alpha-1\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n\left(\beta^2-\beta-1\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right\}\\
&\quad-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n\left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n\cdot 0-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n\cdot 0\\
&=0
\end{aligned}
$$

となるから，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して，a_n が自然数となることを示す。

[1]　$n=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_1&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\\
&=1
\end{aligned}
$$

より，a_n は自然数となる。

[2]　$n=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_2&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\
&=1
\end{aligned}
$$

(1)　12 点

$a_{n+2}-(a_{n+1}+a_n)$ **に** $\{a_n\}$ **の一般項を代入して式変形する方針‥6 点**

証明終‥6 点

(2)　12 点

より，a_n は自然数となる。

[3] 自然数kについて，$n=k,\ k+1$ のとき a_n が自然数となると仮定すると，

(1)の結果より，$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$ となるから，$n=k+2$ のときも a_n は自然数となる。

以上[1], [2], [3]より，自然数nについて a_n が自然数となることが示された。

(証明終)

(3)

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$$ より，

$$\begin{cases}\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n<-0.20\cdot(n+1) & \cdots ① \\ \log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n>-0.21\cdot(n+2) & \cdots ②\end{cases}$$

を示せばよい。

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\because\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1\right)$$
$$<1$$

であるから，

$$\log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n+\log_{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}<\log_{10}1$$
$$\Leftrightarrow \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n<-(n+1)\log_{10}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$
$$\therefore \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n<-0.20\cdot(n+1)\left(\because\log_{10}\frac{\sqrt{5}+1}{2}>0.20\right)$$

となり，①が示された。また，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$
$$>1$$

であるから，

[1]と[2]を示して・・6 点

証明終・・6 点

(3)　12 点

$$\log_{10}\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|<-0.20\cdot(n+1)$$

を示して・・6 点

$$\log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n+\log_{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+2}>\log_{10}1$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n>-(n+2)\log_{10}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\therefore \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n>-0.21\cdot(n+2)\left(\because \log_{10}\frac{\sqrt{5}+1}{2}<0.21\right)$$

となり，②が示された。以上のことから題意は示された。

(証明終)

$-0.21\cdot(n+2)<$

$\log_{10}\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|$

を示して‥6 点

(4)

(4)　24 点

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=a_n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ より，$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ の小数部分と

$a_n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ の小数部分は一致する。よって，

$a_n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ の小数部分を b_n としたとき，b_n の小数第1位，小数第2位，小数第3位が全て0となるような自然数 n の最小値を求めればよい。(3)の結果より $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|<1$ となるから，n が奇数のとき $-1<\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n<0$ となり，n が偶数のとき

$0<\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n<1$ となる。よって，n の偶奇で場合分けをおこなう。

[1]　n が奇数のとき

$$a_n-1<a_n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n<a_n$$

となる。(2)の結果より a_n は整数であるから，

$$b_n = a_n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - (a_n - 1)$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$> 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-1) \left(\because -1 < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n < 0\right)$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}}{5}$$

$$> 0.4 \left(\because \sqrt{5} < 3\right)$$

より，b_n の小数第1位は0とならない。

[2] nが偶数のとき

$$a_n < a_n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n < a_n + 1$$

となる。(2)の結果より a_n は整数であるから，

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる。これと(3)の結果より，

$$-0.21\cdot(n+2) < \log_{10} b_n < -0.20\cdot(n+1)$$

が成り立つから，$n \leqq 12$ のとき，

$$\log_{10} b_n > -0.21\cdot(n+2) \geqq -0.21\cdot(12+2) > -3$$

より，b_n の小数第1位，小数第2位，小数第3位が全て0となることはない。また，$n \geqq 14$ のとき，

$$\log_{10} b_n < -0.20\cdot(n+1) \leqq -0.20\cdot(14+1) = -3$$

より，b_n の小数第1位，小数第2位，小数第3位が全て0となる。

以上[1], [2]より，条件を満たす自然数nの最小値は14である。

(答) 14

[1]のとき

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ の小数部分が $1+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ となる‥6 点

[1]のとき条件を満たさない‥6 点

[2]のとき

$-0.21\cdot(n+2)$
$< \log_{10} b_n$
$< -0.20\cdot(n+1)$

となる‥6 点

答‥6 点

$\boxed{7}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

さいころを1個振ったとき，どの目が出る事象も同様に確からしく，その確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である。また，もらったコインの枚数の合計がちょうど n 枚となる状態を $A(n)$ とする。

[1] $n=1$ のとき

$A(1)$ となるのは，振ったさいころの目が1となるときであるから，その確率は

$$p(1)=\frac{1}{6}$$

である。

[2] $n=2$ のとき

$A(2)$ となるのは，振ったさいころの目が順に $(1, 1)$ となるとき，または振ったさいころの目が2となるときであり，これらは互いに排反であるから，その確率は

$$p(2)=\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6}=\frac{7}{36}$$

である。

[3] $n=3$ のとき

$A(3)$ となるのは，振ったさいころの目が順に $(1, 1, 1)$ となるとき，または順に $(1, 2)$ となるとき，または順に $(2, 1)$ となるとき，または振ったさいころの目が3となるときであり，これらは互いに排反であるから，その確率は

$$p(3)=\frac{1}{6^3}+\frac{2}{6^2}+\frac{1}{6}=\frac{49}{216}$$

である。

(1)　18点

$p(1)=\frac{1}{6}$ ‥6点

$p(2)=\frac{7}{36}$ ‥6点

$p(3)=\frac{49}{216}$ ‥6点

(答)　$p(1)=\dfrac{1}{6},\ p(2)=\dfrac{7}{36},\ p(3)=\dfrac{49}{216}$

(2)　　**(2)　18 点**

$2\leqq n\leqq 6$のとき，$A(n)$ となるのは，「振ったさいころの目がnの場合」と「状態 $A(k)\ (k=1,\cdots,n-1)$ となり，その後に振ったさいころの目が $n-k$ となる場合」であり，これらは最後に振ったさいころの目が異なるため互いに排反である。よって，$A(n)$ となる確率は，

$$p(n)=\frac{1}{6}+p(1)\cdot\frac{1}{6}+\cdots+p(n-1)\cdot\frac{1}{6}\qquad\cdot\cdot\cdot①$$

①‥6 点

と表せる。また，同様にして

$$p(n-1)=\frac{1}{6}+p(1)\cdot\frac{1}{6}+\cdots+p(n-2)\cdot\frac{1}{6}\qquad\cdot\cdot\cdot②$$

と表せる(ただし，$n=2$のとき②の右辺は $\dfrac{1}{6}$)から，①-②より，

$$p(n)-p(n-1)=\frac{1}{6}p(n-1)$$

$$\therefore p(n)=\frac{7}{6}p(n-1)$$

$$\therefore p(n)=\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\cdot p(1)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$$

$p(n)=\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{7}{6}\right)^{n-1}$ ‥6 点

と表せる。したがって，$n=6$のとき

$$p(6)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{6-1}=\frac{7^5}{6^6}\left(=\frac{16807}{46656}\right)$$

となる。

(答)　$p(6)=\dfrac{7^5}{6^6}\left(=\dfrac{16807}{46656}\right)$

答‥6 点

(2)[別解 1]　　**(2)[別解 1]　18 点**

$A(6)$ となるのは，振ったさいころの目の組み合わせが

$\{1,1,1,1,1,1\}$,
$\{2,1,1,1,1\}$,
$\{3,1,1,1\}$, $\{2,2,1,1\}$,
$\{4,1,1\}$, $\{3,2,1\}$, $\{2,2,2\}$,
$\{5,1\}$, $\{4,2\}$, $\{3,3\}$,
$\{6\}$

のいずれかになるときである。よって,	
$$p(6)=\frac{1}{6^6}+\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{6^5}+\frac{{}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2}{6^4}$$ $$+\frac{{}_3\mathrm{C}_1+3!+1}{6^3}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1+1}{6^2}+\frac{1}{6}$$	目の組み合わせ ‥6 点(完答)
$$=\frac{1+30+360+2160+6480+7776}{6^6}$$ $$=\frac{16807}{46656}$$	
となる。	
(答) $p(6)=\dfrac{16807}{46656}$	$p(6)$ の立式‥6 点
	答‥6 点
(2)[別解 2]	(2)[別解 2] 18 点
k を 6 以下の自然数とする。さいころをちょうど k 回振ったときに $A(6)$ となるような目の出方は,	
○$_\wedge$○$_\wedge$○$_\wedge$○$_\wedge$○$_\wedge$○	
の 5 個の $\wedge$ から $k-1$ 個を選択する場合の数に等しく, ${}_5\mathrm{C}_{k-1}$ 通りである。よって,その確率は $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_{k-1}}{6^k}$ となるから,	${}_5\mathrm{C}_{k-1}$ 通り‥6 点
$$p(6)=\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{6^6}+\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{6^5}+\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{6^4}+\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{6^3}+\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{6^2}+\frac{{}_5\mathrm{C}_0}{6^1}$$ $$=\frac{1+30+360+2160+6480+7776}{6^6}$$ $$=\frac{16807}{46656}$$	$p(6)$ の立式‥6 点
となる。	
(答) $p(6)=\dfrac{16807}{46656}$	答‥6 点
(3)	(3) 24 点
$n>6$ のとき $A(n)$ となるのは,「状態	

$A(k)\ (k=n-6,\ n-5,\ \cdots,\ n-1)$ となり，その後に振ったさいころの目が $n-k$ となる場合」であり，これらは最後に振ったさいころの目が異なるため互いに排反である。よって，$A(n)$ となる確率は，

$$p(n)=p(n-6)\cdot\frac{1}{6}+p(n-5)\cdot\frac{1}{6}+\cdots+p(n-1)\cdot\frac{1}{6}\quad\cdots③$$

③‥6 点

と表せる。以下，数学的帰納法を利用して $n\neq 6$ のとき $p(n)<p(6)$ となることを示す。

[1]　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき

(1), (2)より，$1\leqq n\leqq 6$ のとき $p(n)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$ であり，$p(n)$ は単調に増加する。よって，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき $p(n)<p(6)$ が成り立つ。

[1]‥6 点

[2]　$n\leqq N$ (N は 6 以上の自然数)かつ $n\neq 6$ のとき $p(n)<p(6)$ が成り立つと仮定する。

このとき，

$p(N-5)\leqq p(6)$，$p(N-4)\leqq p(6)$，…，$p(N)\leqq p(6)$

であり，これらの等号全てが同時に成立することはない。このことと③より，$n=N+1$ のとき

$$\begin{aligned}p(N+1)&=\frac{1}{6}\cdot\{p(N-5)+p(N-4)+p(N-3)\\&\quad+p(N-2)+p(N-1)+p(N)\}\\&<\frac{1}{6}\cdot\{p(6)+p(6)+p(6)+p(6)+p(6)+p(6)\}\\&=p(6)\end{aligned}$$

となる。したがって，$n=N+1$ のときも $p(n)<p(6)$ が成り立つ。

[2]‥6 点

以上[1], [2]より，$n\neq 6$ のとき $p(n)<p(6)$ となることが示された。

(証明終)

証明終‥6 点

$\boxed{8}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1) 与式の両辺を x で微分すると， $f'(x)=24x^2+6x+12x\log x+6x+(1-12x)f'(x)$ $\Leftrightarrow 12xf'(x)=24x^2+12x+12x\log x$ $\Leftrightarrow f'(x)=2x+1+\log x \ (\because x>0)$ となるから，積分定数を C として， $f(x)=\int(2x+1+\log x)dx$ $=x^2+x+\int(x)'\log xdx$ $=x^2+x+x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$ $=x^2+x\log x+C$ が得られる。ここで，与式に $x=1$ を代入すると， $f(1)=8+3-10=1$ であるから， $1+C=1$ $\therefore C=0$ となり，求める関数は $f(x)=x^2+x\log x$ である。 (答) $f(x)=x^2+x\log x$	(1)　35 点 与式を正しく微分して･･10 点 正しく導関数を積分して･･10 点 C を求めて･･5 点 答･･10 点
(2) (1)の結果および $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ より，	(2)　25 点

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\log f(x)}{\log x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(x^2+x\log x\right)}{\log x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}\log\left\{x^2\left(1+\frac{\log x}{x}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}\left\{2\log x+\log\left(1+\frac{\log x}{x}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left\{2+\frac{1}{\log x}\log\left(1+\frac{\log x}{x}\right)\right\}\\
&= 2+0\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0\right)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

である。

(答) 2

4 行目と同等の形に変形して・・15 点

答・・10 点

$\boxed{9}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

$a=1, b=-1$のとき，$g(x)=1+x-x^2$である。$h(x)=f(x)-g(x)$として，$h(x)\geqq 0$を示せばよい。いま，

$$h'(x)=\cos x-\sin x-(1-2x)$$
$$h''(x)=-\sin x-\cos x+2$$

であるから，

$$h''(x)=-\sin x-\cos x+2=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$$

より，すべてのxに対して$h''(x)>0$を満たすことがわかる。よって，$h'(x)$は単調に増加するから，$h'(0)=0$より$h'(x)=0$は$x=0$以外で解を持たない。これより，$h(x)$の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	－	0	＋
$h(x)$	↘	0	↗

したがって，$h(x)$は$x=0$で極小かつ最小となり，最小値$h(0)=0$をとるから

$$h(x)\geqq 0$$

すなわち

$$f(x)\geqq g(x)$$

が示せた。

(証明終)

(2)

(1)と同様に，

$$h(x)=\sin x+\cos x-1-ax-bx^2$$

とすると，

(1)　20点

$h(x)\geqq 0$を示せばよいことに言及して‥5点

$h(x)$の増減を正しく求めて‥5点

正しく証明して‥10点

(2)　40点

$$h'(x)=\cos x-\sin x-a-2bx$$

である。まず，$a=1$ が必要条件であることを示す。$h'(x)$ は連続な関数であることより増減表はそれぞれ以下のようになる。

[1]　$a<1$ のとき

$h'(0)=1-a$ より，$h'(0)>0$ である。よって，$\beta<x<\alpha$ で $h'(x)>0$ となるような

$\alpha,\beta\ (\alpha>0,\beta<0)$ を取ることができる。増減表は以下のようになる。

x	β	$\cdots$	0	$\cdots$	α
$h'(x)$		+	+	+	
$h(x)$	負	↗	0	↗	正

[2]　$a>1$ のとき，

$h'(0)=1-a$ より，$h'(0)<0$ である。よって，$\beta<x<\alpha$ で $h'(x)<0$ となるような

$\alpha,\beta\ (\alpha>0,\beta<0)$ を取ることができる。増減表は以下のようになる。

x	β	$\cdots$	0	$\cdots$	α
$h'(x)$		-	-	-	
$h(x)$	正	↘	0	↘	負

以上[1], [2]より，$a\neq1$ のとき $h(x)<0$ となる x が存在するため，$a=1$ である必要がある。以下，$a=1$ とすると

必要条件 $a=1$ を示して‥10 点

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$g(x)=bx^2+x+1$$

となる。

[i]　$b\geqq0$ の場合

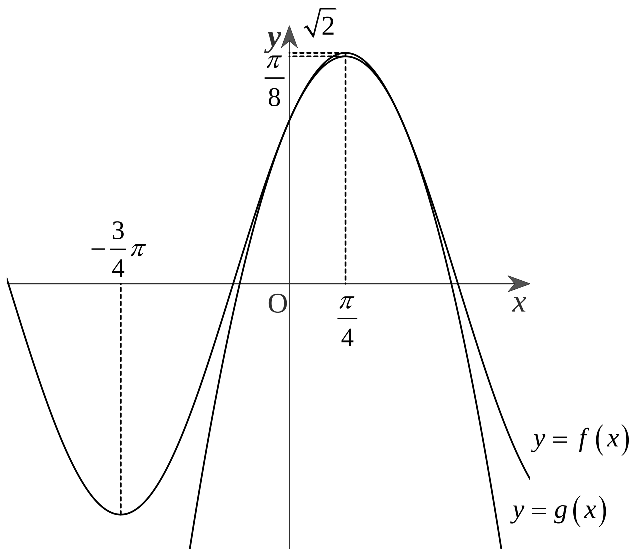
このとき，$g(x)$ は直線または下に凸の放物線である。よって，たとえば

[i]の場合で不適で

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-1-1\cdot\frac{\pi}{2}-b\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$
$$=-\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}b\right)$$
$$<0$$

が成り立つから，この場合は不適である。

[ii] $b=-\frac{2}{\pi}$ の場合



このとき，

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$g(x)=1+x-\frac{2}{\pi}x^2=-\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi}{8}+1$$

である。いま，

$$f\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$$
$$g\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=1-\frac{7}{8}\pi$$

であり，

$$1-\frac{7}{8}\pi<1-\frac{7}{8}\cdot 3=-\frac{13}{8}<-\frac{3}{2}<-\sqrt{2}$$

が成り立つから，これと曲線 $y=f(x)$ は周期が 2π であることを合わせると，$x<-\frac{3}{4}\pi$ において，

あることを示して

‥5 点

[ii]で図形の対称

$$g(x)<g\left(-\frac{3}{4}\pi\right)<f\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\leqq f(x)$$ であることがわかる。さらに，曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ は $x=\frac{\pi}{4}$ に関して対称であるから，$-\frac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲で $h(x)\geqq 0$ が成り立てば $b=-\frac{2}{\pi}$ は条件に適することがわかる。	**性により，指定範囲で示せばよいことに言及して‥5 点**

いま，

$$h'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1+\frac{4}{\pi}x$$

$$h''(x)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{\pi}$$

である。ここで，$-\frac{3}{4}\pi<x<\frac{\pi}{4}$ の範囲で $h''(x)$ は単調に減少し，$1<\frac{4}{\pi}<\sqrt{2}$ であるから，$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ かつ $h''(\alpha)=0$ を満たすただ1つの α が存在する。よって，$h'(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$h''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$h'(x)$	負	↗	0	↗	正	↘	0

以上の増減表より，$h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	正	↘	0	↗	正

増減表を用いて証明して‥10 点

以上より，$-\frac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲で $h(x)\geqq 0$ であることがわ

かるから，$a=1,\ b=-\dfrac{2}{\pi}$ のとき，すべての x で $h(x)\geqq 0$ である。

[iii] $b<-\dfrac{2}{\pi}$ の場合

このとき，

$$\left(-\frac{2}{\pi}x^2+x+1\right)-\left(bx^2+x+1\right)=-\left(b+\frac{2}{\pi}\right)x^2>0$$

であることから，すべての x に対して

$$-\frac{2}{\pi}x^2+x+1>bx^2+x+1$$

であることがわかる。したがって，[ii]より，

$$\begin{aligned} h(x)&=f(x)-g(x)\\ &>f(x)-\left(-\frac{2}{\pi}x^2+x+1\right)\\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

であることが示せた。

[iii]の場合で証明して‥5 点

[iv] $-\dfrac{2}{\pi}<b<0$ の場合

このとき，

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}-b\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\frac{2}{\pi}+b\right)<0$$

であるから，不適である。

[iv]の場合で不適であることを示して‥5 点

以上[i], [ii], [iii], [iv]より，すべての x に対して $h(x)\geqq 0$，すなわち $f(x)\geqq g(x)$ となるような (a,b) の必要十分条件は

$$a=1 \quad かつ \quad b\leqq -\frac{2}{\pi}$$

であることが示せた。

(証明終)

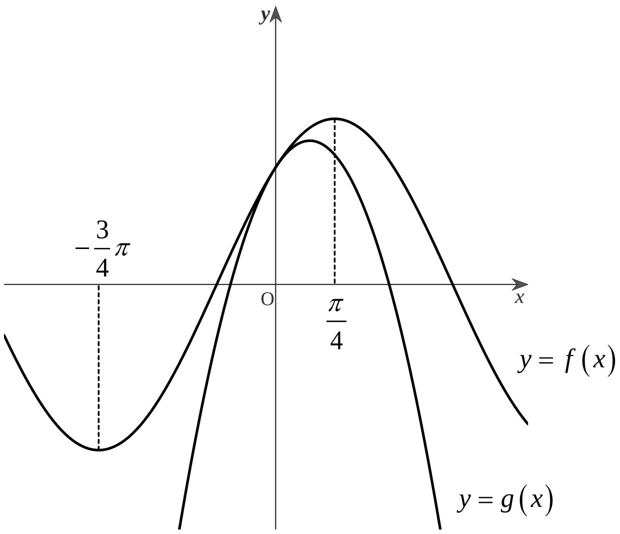
[別解](2)

それぞれの関数に $x=0$ を代入すると，

$$f(0)=1,\ g(0)=1$$

となるから，2 曲線は $x=0$ で共有点を持つ。ここで，すべての x に

対して $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つためにはこの共有点前後で大小関係が入れ替わってはならないから，2曲線は $x=0$ で共通の接点を持ち，なおかつ下図のように放物線 $y=g(x)$ が上に凸である必要がある。



いま，

$$f'(x)=\cos x-\sin x$$
$$g'(x)=a+2bx$$

であるから，2曲線は $x=0$ で共通の接点を持つための条件は

$$f'(0)=g'(0) \Leftrightarrow a=1$$

であることがわかる。また，放物線 $y=g(x)$ が上に凸であるのは $b<0$ のときであるから，

$$a=1 \quad かつ \quad b<0$$

が必要条件である。以下，$a=1$ かつ $b<0$ として b の値で場合分けを行う。

必要条件 $a=1$ を示して‥10 点

必要条件 $b<0$ を示して‥5 点

[i] $b=-\frac{2}{\pi}$ の場合

このとき，

$$f(x)=\sin x+\cos x$$
$$g(x)=1+x-\frac{2}{\pi}x^2$$

より，(1)と同様に，

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

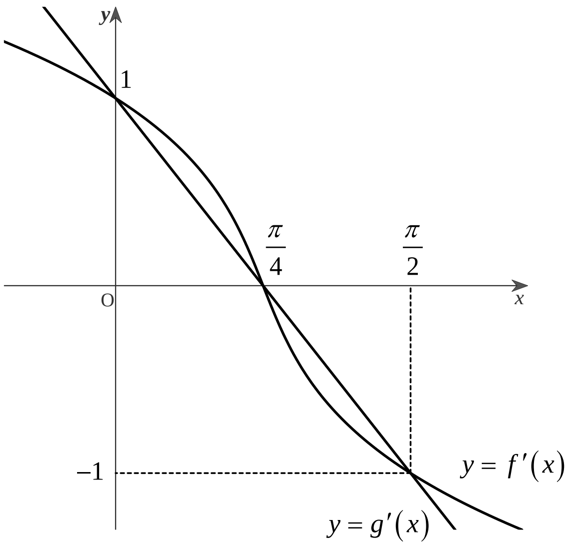
として，$h(x)\geqq 0$ が成り立てば $b=-\dfrac{2}{\pi}$ は条件に適することがわかる。ここで，

$$f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$g'(x)=1-\frac{4}{\pi}x$$

であるから，$y=f'(x),\ y=g'(x)$ を図示すると以下のようになる。

正しく図示して‥5 点



以上より，$h'(x)=f'(x)-g'(x)$ の正負および $h(x)$ の増減は以下のようになる。

増減表を用いて証明して‥10 点

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	0	↗		↘	0	↗

以上より，$a=1,\ b=-\dfrac{2}{\pi}$ のとき，すべての x で $h(x)\geqq 0$ である。

[ii]の場合で証明

[ii] $b<-\frac{2}{\pi}$ の場合

このとき,

$$\left(-\frac{2}{\pi}x^2+x+1\right)-\left(bx^2+x+1\right)=-\left(b+\frac{2}{\pi}\right)x^2>0$$

であることから，すべてのxに対して

$$-\frac{2}{\pi}x^2+x+1>bx^2+x+1$$

であることがわかる。したがって, [i]より,

$$\begin{aligned}h(x)&=f(x)-g(x)\\&>f(x)-\left(-\frac{2}{\pi}x^2+x+1\right)\\&\geqq 0\end{aligned}$$

であることが示せた。

[iii] $-\frac{2}{\pi}<b<0$ の場合

このとき,

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}-b\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\frac{2}{\pi}+b\right)<0$$

であるから，不適である。

以上[i], [ii], [iii]より，すべてのxに対して$h(x)\geqq 0$，すなわち$f(x)\geqq g(x)$となるような(a, b)の必要十分条件は

$$a=1 \quad かつ \quad b\leqq -\frac{2}{\pi}$$

であることが示せた。

(証明終)

(証明終)

して‥5 点

[iii]の場合で不適であることを示して‥5 点