千葉大本番レベル模試　（2019 年 11 月 4 日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

$\boxed{1}$（50 点満点）

(1)（配点 16 点）

- 答えに 16 点($\cos B$ の値と BD の長さに各 8 点)

(2)（配点 34 点）

- AD, AE の長さを求めて（答えに）20 点（各 10 点）
- $\cos\angle\mathrm{CAD}$ の値を求めて 7 点
- CE の長さを求めて（答えに）7 点

$\boxed{2}$（50 点満点）

(1)（配点 14 点）

- 考え方と答えに 14 点

(2)（配点 36 点）

- $\{r_n\}$ は $3, 2, 6, 4, 5, 1$ の繰り返しであることを示して 18 点
- 答えに 18 点

$\boxed{3}$（50 点満点）

(1)（配点 16 点）

- 確率を求める場合が $a_{n-1}=5$ かつ $a_n=1$ のときであることを述べて 8 点
- 答えに 8 点

(2)（配点 34 点）

- 確率を求める場合が（$a_{n-1}=4$ かつ $a_n=1$）または（$a_{n-1}=2$ かつ $a_n=1$）のときであることを述べて 10 点
- 上記の 2 通りの確率をそれぞれ求めて 20 点（各 10 点）
- 答えに 4 点

$\boxed{4}$（50 点満点）

(1)（配点 28 点）

- 接線 l, m の方程式をそれぞれ求めて 8 点（各 4 点）
- 点 C の座標を求めて（答えに）6 点
- $\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{\pi}{4}$ を求めて 8 点
- 円 E の半径を求めて（答えに）6 点

(2)（配点 22 点）

- 円 E の弧 AB と線分 AB によって囲まれる弓形の面積を求めて 8 点
- 放物線 P と直線 AB によって囲まれる部分の面積を求めて 8 点
- 答えに 6 点

$\boxed{5}$（60 点満点）

(1)（配点 14 点）

- $[\log_2 n] = l$ のとき，$l \leqq \log_2 n < l+1$ であることを述べて 5 点
- 考え方と答えに 9 点

(2)（配点 24 点）

- $a_{2^m-1} = m-1$ であり，a_{2^m-1} が値が $m-1$ である最後の項であることを述べて 6 点
- $m \geqq 2$ のとき，$S(2^m-1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \cdots\cdots + (m-1)\cdot 2^{m-1}$ となることを示して 8 点
- 途中の計算と答えに 10 点

(3)（配点 22 点）

- 求める n が $255 = 2^8 - 1 < n \leqq 2^9 - 1 = 511$ を満たすことを求めて 6 点
- $n = 2^8 - 1 + k = 255 + k \leqq 511$ を満たす正の整数 k に対して，$S(n) = 1538 + 8k$ が成り立つことを導いて 10 点
- 答えに 6 点

$\boxed{6}$（60 点満点）

(1)（配点 12 点）

- 答えに 12 点（$\overrightarrow{\mathrm{AG}}, \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ に各 6 点）

(2)（配点 30 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ をパラメータと $\vec{a}, \vec{b}$ を使って 2 通りに表して 8 点（各 4 点）
- $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めて（答えに）7 点
- $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ をパラメータと $\vec{a}, \vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}} = 0$ をこれらで書き下して 8 点（各 4 点）
- $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ を求めて（答えに）7 点

(3)（配点 18 点）

- △OAB の面積を求め，△ACD, △AED のいずれかを△OAB の面積で表して 4 点（各 2 点）
- △AID, △AJD をそれぞれ△OAB の面積で表して 6 点（各 3 点）
- 答えに 8 点

$\boxed{7}$（60 点満点）

(1)（配点 12 点）

- 確率を求める場合が $a_{n-1}=3$ かつ $a_n=1$ のときであることを述べて 4 点
- 答えに 8 点

(2)（配点 22 点）

- 確率を求める場合が（$a_{n-1}=5$ かつ $a_n=1$）または（$a_{n-1}=2$ かつ $a_n=1$）のときであることを述べて 6 点
- 上記の 2 通りの確率をそれぞれ求めて 12 点（各 6 点）
- 答えに 4 点

(3)（配点 26 点）

- 確率を求める場合が（$a_{n-1}=4$ かつ $a_n=1$）または（$a_{n-1}=2$ かつ $a_n=1$）のときであることを述べて 6 点
- $a_{n-1}=4$ かつ $a_n=1$ が起こる場合の数を求めて 6 点
- $a_{n-1}=2$ かつ $a_n=1$ が起こる場合の数を求めて 10 点
- 答えに 4 点

$\boxed{8}$（60 点満点）

(1)（配点 14 点）

- 三角形 T の重心が $-\dfrac{a}{3}$ と表されることを述べて 8 点
- 答えに 6 点

(2)（配点 20 点）

- 3 次方程式を a だけの式で表し，$(x+a)\left(x^2+\dfrac{1}{3}a^2\right)=0$ と式変形を行って 12 点
- 答えに 8 点

(3)（配点 26 点）

- T の形状について正しく（1 辺の長さ，3 点の位置について）述べて 12 点
- T と S が共有点をもつ条件を説明して 8 点
- 答えに 6 点

$\boxed{9}$（60 点満点）

(1)（配点 16 点）

- $f(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$ を導いて 6 点
- $f'(x)>0$ であることを示し，$0\leqq x\leqq t$ において $f(x)$ が単調増加であることを述べて 6 点
- 答えに 4 点（各 2 点）

(2)（配点 20 点）

- $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$0 \leqq f(x) \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となることを示して 4 点

- $0 \leqq f(x) \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ の辺々を $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ で積分し，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \log 2 - S_n$ となることを導いて 12 点

- はさみうちの原理を用いて答えを導いて 4 点

(3)（配点 24 点）

- $0<t<1$ のとき，$0 \leqq x \leqq t$ において，$0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{t^n}{1-t}$ より，辺々を $0 \leqq x \leqq t$ で積分し，$0 \leqq -\log(1-t) - \left(t+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}t^n\right) \leqq \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$ を導いて 6 点

- $0 \leqq -\log(1-t) - \left(t+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}t^n\right) \leqq \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$ の辺々を $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ で積分する方針で，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{-\log(1-t) - \left(t+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}t^n\right)\right\} dt = \dfrac{1}{2}(1-\log 2) - \dfrac{1}{2}T_n$ を導いて 10 点

- $0<t<\dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{t^{n+1}}{1-t}dt \leqq \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ となることを導いて 4 点

- はさみうちの原理を用いて答えを導いて 4 点

$\boxed{10}$（60 点満点）

(1)（配点 18 点）

- $4n$ 個の玉をすべて区別して並べるとしたとき，$(4n)!$ 通りあることを述べて 4 点
- 答えに 14 点（p_0 , p_{2n} に各 7 点）

(2)（配点 20 点）

- $p_{2l+1}=0$ となることの説明とこの結論に 8 点
- p_{2l} を求める説明と答えに 12 点

(3)（配点 22 点）

- (2)より，p_{2l} を最大にするものを探す方針を立てて 2 点

- $\dfrac{p_{2(l+1)}}{p_{2l}} - 1 = \dfrac{-(4n+3)l+2n^2-n-2}{2(l+1)^2}$ を導いて 8 点

- 上記の $-(4n+3)l+2n^2-n-2$ を l の 1 次関数とみて，この関数の符号が p_{2l} と $p_{2(l+1)}$ の大小に対応すること(解答解説⑥)を述べて 4 点

- n が奇数のとき，偶数のときそれぞれについて証明できて 8 点（各 4 点）

$\boxed{11}$（60 点満点）

(1)（配点 24 点）

- $F(1), F(i), F(-i)$ の値をそれぞれ求めて（答えに）6 点（各 2 点）
- $F(z)$ の絶対値の中の z の 3 次式が z^2+1 を因数にもつことを示し，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のように極形式で表したとき，$F(z)=\sqrt{8(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)}$ と 1 変数で表した式を導けて 8 点
- $F(z)$ の増減を調べて 4 点
- $F(z)$ の最大値と $F(z)$ を最大にする z の値を求めて（答えに）6 点（各 3 点）

(2)（配点 10 点）

- 複素数 z_1, z_2 に対して，三角不等式 $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$ が成り立つことを述べて 4 点
- 上記の三角不等式を繰り返し使って証明できて 6 点

(3)（配点 26 点）

- z^3, αz^2, βz がすべて i の正の実数倍であることを示して 7 点
- 題意を満たすのが $z^3=i$, $\alpha z^2=2i$, $\beta z=2i$ のときであることを求めて 4 点
- $z=\cos\theta+i\sin\theta$ のように z を極形式で表して，θ の値を求めて 6 点
- 答えに 9 点（各 3 点）

$\boxed{12}$（60 点満点）

(1)（配点 18 点）

- $R(2^{k+4})=R(2^k)$ となることの説明と $R(2^k)$（答え）に 7 点
- $R(3^{k+4})=R(3^k)$ となることの説明と $R(3^k)$（答え）に 7 点
- $R(3^k)$（答え）に 4 点

(2)（配点 20 点）

- $R(1^k)$, $R(2^k)$, $R(3^k)$, $R(4^k)$, $R(5^k)$ のうち，3 が表れるのが $R(2^k)$，$R(3^k)$ だけであることと $R(p^p)=3$ を満たす p は，$p\equiv 2, 3 \pmod 5$ に限られることを示して 8 点
- 考え方と答えに 12 点（各 6 点）

(3)（配点 22 点）

- 題意を満たす m, n は $m\equiv 2, 3 \pmod 5$，$n\equiv 2, 3 \pmod 5$ であることを述べて 4 点
- m, n の組合せを 4 通りで場合分けをしてそれぞれ検討し，答えを求めて 18 点