

# 2021年 神戸大本番レベル模試・理系・数学

## 解答・解説・採点基準

全5問 120分 150点満点

### I. (30点)

#### 【解答・採点基準】

(1)

$\{x \mid x \text{ は } y = x^3 - 24x \text{ と } y = 3x^2 + k \text{ の共有点の } x \text{ 座標}\}$

$= \{x \mid x^3 - 24x = 3x^2 + k \text{ かつ } x \text{ は実数}\}$

$= \{x \mid x^3 - 3x^2 - 24x = k \text{ かつ } x \text{ は実数}\}$

$= \{x \mid x \text{ は } y = x^3 - 3x^2 - 24x \text{ と } y = k \text{ の共有点の } x \text{ 座標}\}$

である。よって、

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$$

とおき  $y = f(x)$  と  $y = k$  が共有点を3個持つような  $k$  の範囲を求めればよい。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$$

であるから  $f(x)$  の増減は下表に従う。

$x$	...	-2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 = -80$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2) = 28$$

にも注意して  $y = f(x)$  と  $y = k$  を図示すると下図のようになる。

(1) 8点

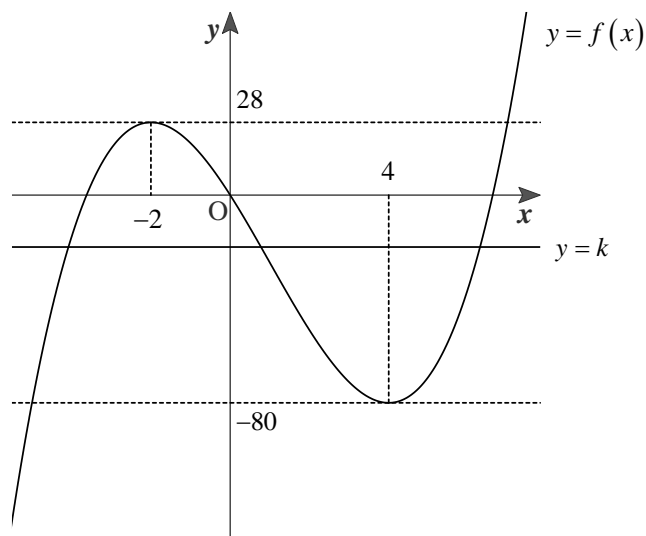
直線と3次関数の  
グラフの共有点の  
個数に関する条件  
に言い換える

..2点

導関数を因数分解  
した形 or  $f'(x) = 0$   
の解を求める

..2点

増減表..2点



上図より  $y = f(x)$  と  $y = k$  が共有点を3個持つような  $k$  の範囲は  
 $-80 < k < 28$                       . . . (答)  
 である。

(2)

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b (x-a)(x-b)(x-c) dx \\
 &= \int_a^b (x-a)(x-b) \{ (x-a) + (a-c) \} dx \\
 &= \int_a^b \{ (x-a)^2(x-b) + (x-a)(x-b)(a-c) \} dx \\
 &= \int_a^b (x-a)^2 \{ (x-a) + (a-b) \} dx + (a-c) \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\
 &= \int_a^b \left\{ (x-a)^3 + (a-b)(x-a)^2 \right\} dx - \frac{(a-c)}{6} (b-a)^3 \\
 &= \left[ \frac{1}{4}(x-a)^4 - \frac{1}{3}(a-b)(x-a)^3 \right]_a^b - \frac{(a-c)}{6} (b-a)^3 \\
 &= -\frac{1}{12}(b-a)^4 - \frac{(a-c)}{6} (b-a)^3
 \end{aligned}$$

より成立する。

(証明終)

(2)[別解]

展開して比較する。左辺について

答..2点

(2) 6点

被積分関数を  
 $(x-a)^n$  ( $n=1, 2, 3$ )  
 の項に分解する方  
 針(1/6 公式は前提  
 として良い。 $n=1$   
 はなくても可。)

..2点

証明完了..4点

(2) [別解] 6点

$$\begin{aligned}
& \int_a^b (x-a)(x-b)(x-c) dx \\
&= \int_a^b \{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc\} dx \\
&= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+b+c)x^3 + \frac{1}{2}(ab+bc+ca)x^2 - abcx \right]_a^b \\
&= \frac{1}{4}(b^4 - a^4) - \frac{1}{3}(a+b+c)(b^3 - a^3) \\
&\quad + \frac{1}{2}(ab+bc+ca)(b^2 - a^2) - abc(b-a) \\
&= \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{3}b^4 - \frac{1}{3}b^3c + \frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{3}a^3c \\
&\quad + \frac{1}{2}ab^3 + \frac{1}{2}b^3c + \frac{1}{2}ab^2c - \frac{1}{2}a^3b - \frac{1}{2}a^2bc - \frac{1}{2}a^3c \\
&\quad - ab^2c + a^2bc \\
&= -\frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{6}ab^3 + \frac{1}{6}b^3c - \frac{1}{6}a^3b - \frac{1}{6}a^3c \\
&\quad - \frac{1}{2}ab^2c + \frac{1}{2}a^2bc
\end{aligned}$$

となる。右辺について

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12}(b-a)^4 - \frac{(a-c)}{6}(b-a)^3 \\
&= -\frac{1}{12}(b^4 - 4b^3a + 6b^2a^2 - 4ba^3 + a^4) \\
&\quad - \frac{(a-c)}{6}(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) \\
&= -\frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{3}a^3b - \frac{1}{12}a^4 \\
&\quad - \frac{1}{6}(ab^3 - 3a^2b^2 + 3a^3b - a^4 - b^3c + 3ab^2c - 3a^2bc + a^3c) \\
&= -\frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{6}ab^3 + \frac{1}{6}b^3c - \frac{1}{6}a^3b - \frac{1}{6}a^3c \\
&\quad - \frac{1}{2}ab^2c + \frac{1}{2}a^2bc
\end{aligned}$$

となり問題文の等式は成立する。

(証明終)

(3)

$y = x^3 - 24x$  と  $y = 3x^2 + k$  のグラフの上下関係を考えるために

$$x^3 - 24x - (3x^2 + k)$$

の符号を考える。 $\alpha, \beta, \gamma$  は  $x^3 - 24x - (3x^2 + k) = 0$  の解であるから、

$$x^3 - 24x - (3x^2 + k) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

と因数分解できる。ゆえに、

$$\alpha \leq x \leq \beta \text{ において } x^3 - 24x \geq 3x^2 + k$$

左辺を展開・・・3点

右辺を展開・・・3点

(3) 16点

グラフの上下関係を  
示す(図示でも  
可)・・・2点

$$\beta \leq x \leq \gamma \text{ において } 3x^2 + k \geq x^3 - 24x$$

となる。以上より

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{x^3 - 24x - (3x^2 + k)\} dx = \int_{\beta}^{\gamma} \{3x^2 + k - (x^3 - 24x)\} dx$$

が成立するときの  $k$  を求めればよい。上式を整理すると

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{x^3 - 24x - (3x^2 + k)\} dx = \int_{\beta}^{\gamma} \{3x^2 + k - (x^3 - 24x)\} dx$$

$$\therefore \int_{\alpha}^{\gamma} \{x^3 - 24x - (3x^2 + k)\} dx = 0$$

$$\therefore \int_{\alpha}^{\gamma} (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) dx = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{12}(\gamma - \alpha)^4 - \frac{(\alpha - \beta)}{6}(\gamma - \alpha)^3 = 0$$

$$\therefore (\gamma - \alpha) + 2(\alpha - \beta) = 0 \quad (\because \gamma - \alpha \neq 0)$$

$$\therefore \gamma + \alpha = 2\beta \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。また、 $x^3 - 3x^2 - 24x - k = 0$  についての解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -24 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta\gamma = k \quad \dots \textcircled{4}$$

が成立する。①, ②より

$$\beta = 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\alpha + \gamma = 2 \quad \dots \textcircled{6}$$

を得る。③, ⑤, ⑥より

$$\alpha\gamma = -26 \quad \dots \textcircled{7}$$

であるから、④, ⑤, ⑦より

$$k = -26 \quad \dots \text{(答)}$$

を得る。これは確かに  $-80 < k < 28$  を満たす。

(3)[別解 1]

$y = x^3 - 24x$  と  $y = 3x^2 + k$  のグラフを図示すると下図のようになる。

問題文の条件を定  
積分で表す…2点

(2)の結果の利用  
…2点

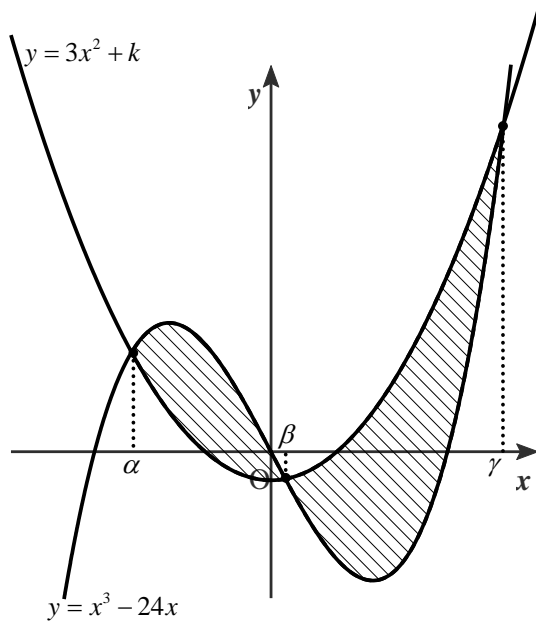
①…2点

②…2点

⑤…2点

答…4点

(3) [別解 1] 16点



よって、2つの囲まれた領域の内、 $\alpha \leq x \leq \beta$ の部分の面積と $\beta \leq x \leq \gamma$ の部分の面積が一致するならば

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{x^3 - 24x - (3x^2 + k)\} dx &= \int_{\beta}^{\gamma} \{3x^2 + k - (x^3 - 24x)\} dx \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} (x^3 - 3x^2 - 24x - k) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 12x^2 - kx \right]_{\alpha}^{\gamma} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}\gamma^4 - \gamma^3 - 12\gamma^2 - k\gamma &= \frac{1}{4}\alpha^4 - \alpha^3 - 12\alpha^2 - k\alpha \quad \dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

が成立する。 $\alpha$ は $x^3 - 3x^2 - 24x = k$ の実数解であるから  
 $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 24\alpha = k$ を満たし、

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= 3\alpha^2 + 24\alpha + k \\ \alpha^4 &= \alpha(3\alpha^2 + 24\alpha + k) \\ &= 3(3\alpha^2 + 24\alpha + k) + 24\alpha^2 + k\alpha \\ &= 33\alpha^2 + (72 + k)\alpha + 3k \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned} \gamma^3 &= 3\gamma^2 + 24\gamma + k \\ \gamma^4 &= 33\gamma^2 + (72 + k)\gamma + 3k \end{aligned}$$

が成立する。⑧の両辺をそれぞれ $\gamma, \alpha$ の2次以下の式に変形すると

グラフの上下関係  
を示す・・・2点

問題文の条件を定  
積分で表す・・・2点

次数を下げる方針  
・・・2点

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\gamma^4 - \gamma^3 - 12\gamma^2 - k\gamma &= \frac{1}{4}\alpha^4 - \alpha^3 - 12\alpha^2 - k\alpha \\ \therefore -\frac{27}{4}\gamma^2 - \left(\frac{3}{4}k+6\right)\gamma - \frac{1}{4}k &= -\frac{27}{4}\alpha^2 - \left(\frac{3}{4}k+6\right)\alpha - \frac{1}{4}k \\ \therefore (\alpha-\gamma) \left\{ \frac{27}{4}(\alpha+\gamma) + \left(\frac{3}{4}k+6\right) \right\} &= 0 \\ \therefore \alpha+\gamma &= -\frac{1}{9}k - \frac{8}{9} \quad (\because \alpha \neq \gamma) \end{aligned}$$

を得る。  $x^3 - 3x^2 - 24x - k = 0$  についての解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = 3$$

が成立するから

$$\beta = \frac{1}{9}k + \frac{35}{9} \Leftrightarrow k = 9\beta - 35$$

となる。一方、  $\beta^3 - 3\beta^2 - 24\beta = k$  を満たすから  $k$  を消去して

$$\begin{aligned} \beta^3 - 3\beta^2 - 33\beta + 35 &= 0 \\ \therefore (\beta-1)(\beta^2 - 2\beta - 35) &= 0 \\ \therefore (\beta-1)(\beta-7)(\beta+5) &= 0 \\ \therefore \beta &= 1 \quad (\because \alpha < -2 < \beta < 4 < \gamma) \end{aligned}$$

であり

$$k = -26 \quad \dots \text{(答)}$$

を得る。これは確かに  $-80 < k < 28$  を満たす。

(3)[別解 2]

$y = x^3 - 24x$  と  $y = 3x^2 + k$  のグラフの上下関係を考えるために

$$x^3 - 24x - (3x^2 + k)$$

の符号を考える。  $\alpha, \beta, \gamma$  は  $x^3 - 24x - (3x^2 + k) = 0$  の解であるから、

$$x^3 - 24x - (3x^2 + k) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解できる。ゆえに、

$$\alpha \leq x \leq \beta \text{ において } x^3 - 24x \geq 3x^2 + k$$

$$\beta \leq x \leq \gamma \text{ において } 3x^2 + k \geq x^3 - 24x$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{x^3 - 24x - (3x^2 + k)\} dx &= \int_{\beta}^{\gamma} \{3x^2 + k - (x^3 - 24x)\} dx \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - k\} dx &= \int_{\beta}^{\gamma} \{k - f(x)\} dx \end{aligned}$$

が成立する、すなわち下図の2つの囲まれた領域の面積  $S_1, S_2$  が一致するときの  $k$  を求めればよい。

$$\alpha + \gamma = -\frac{1}{9}k - \frac{8}{9}$$

・・2点

$$\alpha + \beta + \gamma = 3$$

・・2点

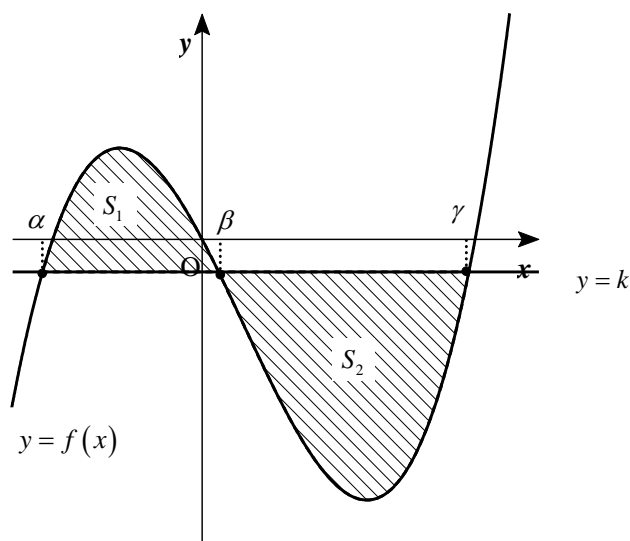
$$\beta = 1 \quad \text{・・2点}$$

答・・4点

(3) [別解 2] 16点

グラフの上下関係を示す(図示でも可)・・2点

問題文の条件を定積分で表す・・2点



ここで  $y = f(x)$  のグラフが変曲点に関して点対称であることを示す。変曲点の座標は

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

より  $(1, f(1)) = (1, -26)$  である。よって、

$$\begin{aligned} & f(1+x) - (-26) \\ &= (1+x)^3 - 3(1+x)^2 - 24(1+x) + 26 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 - 24x - 24 + 26 \\ &= x^3 - 27x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\{f(1-x) - (-26)\} \\ &= -(1-x)^3 + 3(1-x)^2 + 24(1-x) - 26 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 + 24 - 24x - 26 \\ &= x^3 - 27x \end{aligned}$$

$$\therefore f(1+x) - (-26) = -\{f(1-x) - (-26)\}$$

より、 $y = f(x)$  のグラフは  $(1, -26)$  に関して点対称である。したがって、対称性より直線  $y = k$  が  $(1, -26)$  を通るとき、すなわち  $k = -26$  のとき  $S_1 = S_2$  となる。また、 $-80 < k < 28$  の範囲において、 $k$  の増加に伴い、 $S_1$  は連続かつ単調に減少し、 $S_2$  は連続かつ単調に増加するから、 $S_1 = S_2$  となるのは

$$k = -26 \quad \dots \text{(答)}$$

のときのみである。

3次関数のグラフが変曲点に関して点対称であることを示す・・・6点

対称性より  $k = -26$  ならば  $S_1 = S_2$  ...4点

$k = -26$  のみであることを示す・・・2点

## 2. (30点)

### 【解答・採点基準】

以下  $a \times b \times c$  が3の倍数となる事象を  $A$ ,  $abc_{(10)}$  が6の倍数となる事象を  $B$  と表し、事象  $X$  の起きる確率を  $P(X)$  のように表す。

(1)

$a \times b \times c$  が3の倍数となる必要十分条件は  $a, b, c$  のうち少なくとも1つが3の倍数となることである。その余事象「 $a, b, c$  はいずれも3の

倍数でない」の確率は  $P(\bar{A}) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$  であるから、求める確率は

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \cdots (\text{答})$$

である。

(2)

すべての目の出方は  $6^3 = 216$  通りあり、これらは同様に確からしいため、以下、場合の数を考えて  $P(B)$  を求める。条件は

$abc_{(10)}$  が6の倍数

$\Leftrightarrow abc_{(10)}$  が2の倍数かつ3の倍数

$\Leftrightarrow c$  が2の倍数かつ  $a+b+c$  が3の倍数

と言い換えられるから、 $c=2, 4, 6$  に限られる。以下、 $c$  の値で場合分けして  $a+b+c$  が3の倍数となる6以下の自然数の組  $\{a, b\}$  を調べる。

[1]  $c=2$  のとき

$$4 \leq a+b+c \leq 14$$

より、

$$a+b+c = 6, 9, 12$$

$$\therefore a+b = 4, 7, 10$$

$$\therefore \{a, b\} = \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}$$

であり、この条件で順列  $(a, b, c)$  は

$$5 \cdot 2! + 2 = 12 (\text{通り})$$

(1) 6点

余事象を考える方針・2点

答・4点

(2) 14点

$c$  が2の倍数・2点

$a+b+c$  が3の倍数・2点

$c=2$  のとき12通り・2点



ある。

[2]  $c=4$  のとき

$$6 \leq a+b+c \leq 16$$

より,

$$a+b+c=6, 9, 12, 15$$

$$\therefore a+b=2, 5, 8, 11$$

$$\therefore \{a, b\} = \{1, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4, 4\}, \{5, 6\}$$

であり, この条件で順列  $(a, b, c)$  は

$$5 \cdot 2! + 2 = 12 \text{ (通り)}$$

ある。

[3]  $c=6$  のとき

$$8 \leq a+b+c \leq 18$$

より,

$$a+b+c=9, 12, 15, 18$$

$$\therefore a+b=3, 6, 9, 12$$

$$\therefore \{a, b\} = \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{6, 6\}$$

であり, この条件で順列  $(a, b, c)$  は

$$5 \cdot 2! + 2 = 12 \text{ (通り)}$$

ある。

以上, [1], [2], [3]より,

$$P(B) = \frac{12+12+12}{216} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \quad \dots \text{(答)}$$

である。

(2)[別解 1]

すべての目の出方は  $6^3 = 216$  通りあり, これらは同様に確からしいため, 以下, 場合の数を考えて  $P(B)$  を求める。条件は

$abc_{(10)}$  が 6 の倍数

$\Leftrightarrow abc_{(10)}$  が 2 の倍数かつ 3 の倍数

$\Leftrightarrow c$  が 2 の倍数かつ  $a+b+c$  が 3 の倍数

と言い換えられる。

$$3 \leq a+b+c \leq 18$$

であるから,  $a+b+c$  が 3 の倍数となるのは

$$a+b+c=3, 6, 9, 12, 15, 18$$

$c=4$  のとき 12 通り  
..2 点

$c=6$  のとき 12 通り  
..2 点

答..4 点

(2)[別解 1] 14 点

$c$  が 2 の倍数..2 点  
 $a+b+c$  が 3 の倍数..2 点

に限られる。以下、 $a+b+c$  の値で場合分けして、

$$2 \leq a+b \leq 12$$

に注意して、 $c=2, 4, 6$  となる順列  $(a, b, c)$  を数え上げる。

[1]  $a+b+c=3$  のとき

$(a, b, c)=(1, 1, 1)$  であるから、 $c$  は 2 の倍数とならない。

[2]  $a+b+c=6$  のとき

$c$  が 2 の倍数となるのは

$$a+b=2, 4$$

$$\therefore \{a, b\} = \{1, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}$$

のときである。この条件で順列  $(a, b, c)$  は

$$2!+2=4 \text{ (通り)}$$

ある。

[3]  $a+b+c=9$  のとき

$c$  が 2 の倍数となるのは

$$a+b=3, 5, 7$$

$$\therefore \{a, b\} = \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$$

のときである。この条件で順列  $(a, b, c)$  は

$$6 \cdot 2! = 12 \text{ (通り)}$$

ある。

[4]  $a+b+c=12$  のとき

$c$  が 2 の倍数となるのは

$$a+b=6, 8, 10$$

$$\therefore \{a, b\} = \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4, 4\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}$$

のときである。この条件で順列  $(a, b, c)$  は

$$5 \cdot 2! + 3 = 13 \text{ (通り)}$$

ある。

[5]  $a+b+c=15$  のとき

$c$  が 2 の倍数となるのは

$$a+b=9, 11$$

$$\therefore \{a, b\} = \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$$

のときである。この条件で順列  $(a, b, c)$  は

$$3 \cdot 2! = 6 \text{ (通り)}$$

ある。

$a+b+c=3$  のとき

0通り・・・1点

$a+b+c=6$  のとき

4通り・・・1点

$a+b+c=9$  のとき

12通り・・・1点

$a+b+c=12$  のとき

13通り・・・1点

$a+b+c=15$  のとき

6通り・・・1点

[6]  $a+b+c=18$  のとき

$(a, b, c) = (6, 6, 6)$  の1通りのみ条件を満たす。

以上, [1]~[6]より,

$$P(B) = \frac{4+12+13+6+1}{216} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \quad \dots (答)$$

である。

(2)[別解 2]

すべての目の出方は  $6^3 = 216$  通りあり, これらは同様に確からしいため, 以下, 場合の数を考えて  $P(B)$  を求める。条件は

$abc_{(10)}$  が 6 の倍数

$\Leftrightarrow abc_{(10)}$  が 2 の倍数かつ 3 の倍数

$\Leftrightarrow c \equiv 0 \pmod{2}$  かつ  $a+b+c \equiv 0 \pmod{3}$

と言い換えられる。

$$R_0 = \{3, 6\}, R_1 = \{1, 4\}, R_2 = \{2, 5\}$$

と 3 で割った余りで分けた集合を考える。  $a+b+c \equiv 0 \pmod{3}$  となるのは次のどちらかの場合である。

[1]  $a, b, c$  が全て同じ  $R_i (i=0, 1, 2)$  に属する。

[2]  $a, b, c$  がそれぞれ異なる  $R_i (i=0, 1, 2)$  に属する。

[1] のとき

$c \equiv 0 \pmod{2}$  となるのは,  $i$  の選び方が 3 通り,  $a, b$  がそれぞれ 2 通り,  $c$  が 1 通りあるため, 合わせて

$$3 \cdot 2^2 = 12 (\text{通り})$$

となる。

[2] のとき

$c \equiv 0 \pmod{2}$  となるのは,  $i$  の選び方が 3! 通り,  $a, b$  がそれぞれ 2 通り,  $c$  が 1 通りあるため, 合わせて

$$3! \cdot 2^2 = 24 (\text{通り})$$

となる。

以上より,

$$P(B) = \frac{12+24}{216} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \quad \dots (答)$$

である。

(3)

$a+b+c=18$  のとき  
1 通り  $\dots 1$  点

答  $\dots 4$  点

(2)[別解 2] 14 点

$c \equiv 0 \pmod{2}$   $\dots 2$  点

$a+b+c \equiv 0 \pmod{3}$

$\dots 2$  点

[1] のとき 12 通り

$\dots 3$  点

[2] のとき 24 通り

$\dots 3$  点

答  $\dots 4$  点

(3) 10 点

求める条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

である。 $abc_{(10)}$  が6の倍数かつ $a \times b \times c$ が3の倍数となる確率

$P(A \cap B)$ を求める。(2)の場合分け[1], [2], [3]で考えた $a, b, c$ の組のうち3の倍数を含まないものは,

$$c=2 \text{ のとき } \{a, b\} = \{2, 2\}, \{2, 5\}, \{5, 5\}$$

$$c=4 \text{ のとき } \{a, b\} = \{1, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 4\}$$

であり,

$$2 \cdot 2! + 4 = 8 \text{ (通り)}$$

ある。よって,

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \frac{36-8}{216} = \frac{28}{216}$$

である。以上より,(2)の結果も用いて, 求める条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{28}{216}}{\frac{36}{216}} = \frac{7}{9} \quad \dots \text{(答)}$$

となる。

(3)[別解] ((2)[別解 2]の続き)

求める条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

である。 $abc_{(10)}$  が6の倍数かつ $a \times b \times c$ が3の倍数となる確率

$P(A \cap B)$ を求める。(2)[別解 2]の場合分け[1], [2]で考えた $a, b, c$ の組のうち3の倍数を含まないものは,

[1]のとき

$i$ の選び方が $R_0$ 以外の2通り, $a, b$ がそれぞれ2通り, $c$ が1通りあるため,合わせて

$$2 \cdot 2^2 = 8 \text{ (通り)}$$

となる。

[2]のとき

常に $R_0$ から選ばれるため0通りとなる。

よって,

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

を求める方針

..2点

$$P(A \cap B) = \frac{28}{216}$$

..4点

答..4点

(3)[別解] 10点

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

を求める方針

..2点

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \frac{36-8}{216} = \frac{28}{216}$$

である。以上より、(2)の結果も用いて、求める条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{28}{216}}{\frac{36}{216}} = \frac{7}{9} \dots (\text{答})$$

となる。

$$P(A \cap B) = \frac{28}{216}$$

・・4点

答・・4点

[注] 「 $A: abc_{(10)}$ が6の倍数」「 $B: a \times b \times c$ が3の倍数」の全列挙

塗りつぶし:  $A$  ○:  $B$

		$c$																	
		2						4						6					
		$a$						$a$						$a$					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
$b$	1			○			○			○			○	○	○	○	○	○	○
	2			○			○			○			○	○	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	4			○			○			○			○	○	○	○	○	○	○
	5			○			○			○			○	○	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

		$c$																	
		1						3						5					
		$a$						$a$						$a$					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
$b$	1			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	2			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	4			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	5			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

### 3. (30点)

#### 【解答・採点基準】

(1)

題意より,  $\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$  である。  $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CA}$  であるから,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \\ (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases}$$

$$\therefore \vec{b} \cdot \vec{c} = -2, \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{5}{3} \quad \dots \text{(答)}$$

と求められる。

(2)

$\triangle ABC$  の各辺の長さを求めると,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 49 \\ |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 = 36 \\ |\overrightarrow{CA}|^2 &= |\vec{a} - \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{c}|^2 = 25 \end{aligned}$$

より,  $AB = 7, BC = 6, CA = 5$  である。余弦定理より

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{7}$$

であり,  $0 < \angle ABC < \pi$  であるから

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

(1) 6点

答・・・6点  
(各3点×2)

(2) 9点

$\triangle ABC$  の3つの辺  
の長さを求める  
・・・3点

となる。したがって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = 6\sqrt{6} \quad \dots (答)$$

と求められる。また、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を $r$ とすると

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} r (AB + BC + CA)$$

が成り立つから、 $\triangle ABC$ の内接円の半径は

$$r = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{7+6+5} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \dots (答)$$

である。

(2)[別解]

$$|\overline{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 49$$

$$|\overline{AC}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = 25$$

より、 $|\overline{AB}| = 7$ 、 $|\overline{AC}| = 5$ である。また、

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2 \\ &= 19 \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} = 6\sqrt{6} \quad \dots (答)$$

と求められる。さらに、

$$|\overline{BC}|^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 = 36$$

より、 $|\overline{BC}| = 6$ であり、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を $r$ とすると

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} r (|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CA}|)$$

が成り立つから、 $\triangle ABC$ の内接円の半径は

$$r = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{7+6+5} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \dots (答)$$

である。

$\triangle ABC$ の面積

..3点

内接円の半径

..3点

(2)[別解] 9点

$\triangle ABC$ の2つの辺の長さ  
と内積を求める..3点

$\triangle ABC$ の面積

..3点

内接円の半径

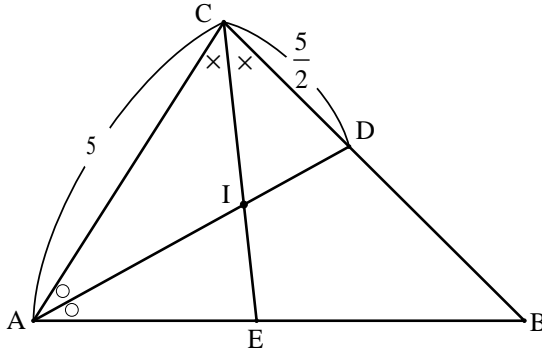
..3点

(3)

内心は三角形の3つの内角の二等分線の交点である。∠BACの二等分線と辺BCとの交点をDとすると、角の二等分線の性質より

$$BD:DC = AB:CA = 7:5$$

であるから、 $CD = \frac{5}{12}BC = \frac{5}{2}$ と分かる。



△CADにおいて、線分CIは∠ACDの二等分線であるから、

$AI:ID = CA:CD = 5:\frac{5}{2} = 2:1$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OD} \\ &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\vec{OB} + \frac{7}{12}\vec{OC}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b} + \frac{7}{18}\vec{c} \end{aligned} \quad \dots (答)$$

である。ここで、

$$\vec{HI} = \vec{OI} - \vec{OH} = -\frac{1}{18}\vec{b} + \frac{1}{18}\vec{c} = \frac{1}{18}\vec{BC}$$

であるから、 $|\vec{HI}| = \frac{1}{18}|\vec{BC}| = \frac{1}{3}$ であり、 $\frac{1}{3} < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ より、点Hは平面

ABC上で△ABCの内接円の内部にある。

(3) 15点

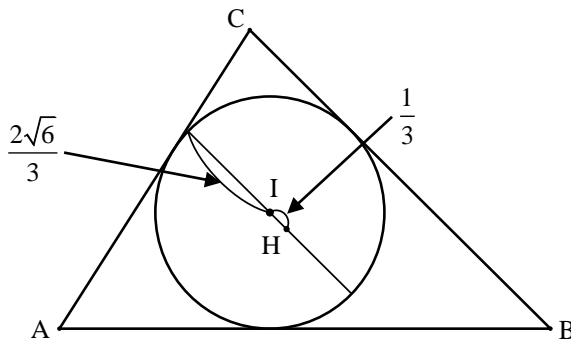
$\vec{OI}$ ・・・6点

$\vec{HI} = \frac{1}{18}\vec{BC}$ ・・・3点

点Hが△ABCの内接円の内部にある

・・・3点





$|\overline{HP}|$  が最小となるとき、3点 I, H, P がこの順に一直線上に並び、

$|\overline{HP}| = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{3}$  である。 $|\overline{HP}|$  が最大となるとき、3点 H, I, P がこの

順に一直線上に並び、 $|\overline{HP}| = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{3}$  である。したがって、 $|\overline{HP}|$  の

とりうる値の範囲は

$$\frac{2\sqrt{6}-1}{3} \leq |\overline{HP}| \leq \frac{2\sqrt{6}+1}{3} \quad \dots \text{(答)}$$

である。

(3)[別解]

内心は三角形の3つの内角の二等分線の交点である。 $\angle BAC$  の二等分線と辺 BC との交点を D,  $\angle ACB$  の二等分線と辺 AB との交点を E とすると、角の二等分線の性質より

$$BD:DC = AB:CA = 7:5$$

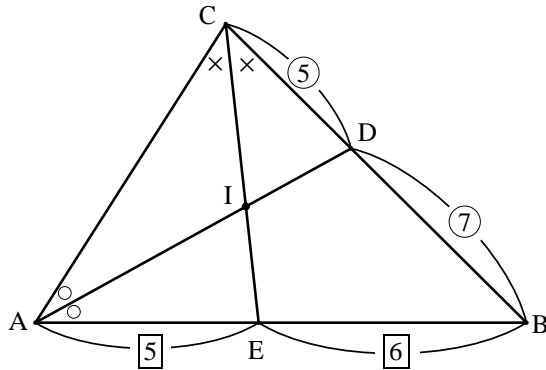
$$AE:EB = CA:BC = 5:6$$

と分かる。

$|\overline{HP}|$  のとりうる値

の範囲…3点

(3)[別解] 15点



△ABCの内心Iは2つの線分AD, CE上にあるから,  $k, l$ を実数として

$$\begin{cases} \vec{AI} = k\vec{AD} \\ \vec{AI} = l\vec{AE} + (1-l)\vec{AC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AI} = \frac{5}{12}k\vec{AB} + \frac{7}{12}k\vec{AC} \\ \vec{AI} = \frac{5}{11}l\vec{AB} + (1-l)\vec{AC} \end{cases}$$

と表せ,  $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は平行でないから

$$\begin{cases} \frac{5}{12}k = \frac{5}{11}l \\ \frac{7}{12}k = 1-l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ l = \frac{11}{18} \end{cases}$$

と求められる。したがって,

$$\vec{AI} = \frac{5}{18}\vec{AB} + \frac{7}{18}\vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OI} - \vec{OA} = \frac{5}{18}(\vec{OB} - \vec{OA}) + \frac{7}{18}(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$\therefore \vec{OI} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b} + \frac{7}{18}\vec{c} \quad \dots \text{(答)}$$

である。ここで,

$$\vec{HI} = \vec{OI} - \vec{OH} = -\frac{1}{18}\vec{b} + \frac{1}{18}\vec{c} = \frac{1}{18}\vec{BC}$$

であるから,  $|\vec{HI}| = \frac{1}{18}|\vec{BC}| = \frac{1}{3}$ であり,  $\frac{1}{3} < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ より, 点Hは平面

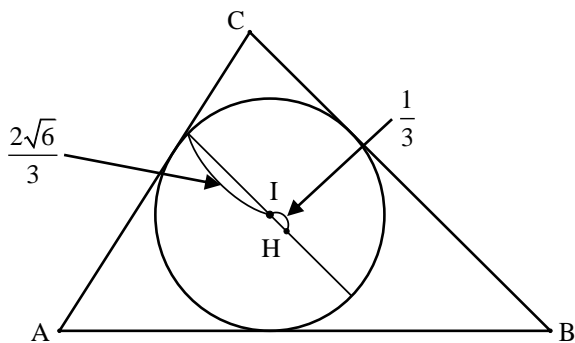
$\vec{OI}$ ・・・6点

$$\vec{HI} = \frac{1}{18}\vec{BC} \quad \dots \text{3点}$$

点Hが△ABCの内接円の内部にある

・・・3点

ABC 上で  $\triangle ABC$  の内接円の内部にある。



$|\overline{HP}|$  が最小となるとき、3点 I, H, P がこの順に一直線上に並び、

$|\overline{HP}| = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{3}$  である。 $|\overline{HP}|$  が最大となるとき、3点 H, I, P がこの

順に一直線上に並び、 $|\overline{HP}| = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{3}$  である。したがって、 $|\overline{HP}|$  の

とりうる値の範囲は

$$\frac{2\sqrt{6}-1}{3} \leq |\overline{HP}| \leq \frac{2\sqrt{6}+1}{3} \quad \dots \text{(答)}$$

である。

$|\overline{HP}|$  のとりうる値

の範囲・・・3点

#### 4. (30点)

#### 【解答・採点基準】

(1)

[1]  $n=1$  のとき

$$(\text{左辺}) = (1+h)^1 = 1+h$$

$$(\text{右辺}) = 0$$

より,  $(\text{左辺}) > (\text{右辺})$  が成立する。

[2]  $n \geq 2$  のとき

二項定理を用いて展開すると

$$(\text{左辺}) = (1+h)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot h^k \cdot 1^{n-k} \cdots \textcircled{1}$$

である。このとき①の最右辺の  $k=2$  に対応する項は

$${}_n C_2 \cdot h^2 = \frac{n(n-1)}{2} h^2 = (\text{右辺})$$

であり, それ以外の項は正であるから  $(\text{左辺}) > (\text{右辺})$  が成立する。

以上[1], [2]より  $(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2} h^2$  が成立する。

次に  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n = 0$  ( $0 < \alpha < 1$ ) を示す。  $y = \frac{1}{1+x}$  とおくと  $x$  が  $x > 0$  の

範囲を動くとき,  $y$  は  $0 < y < 1$  の範囲を動く。よって,  $0 < \alpha < 1$  より正の定数  $h$  を用いて

$$\alpha = \frac{1}{1+h}$$

と表せる。  $n \geq 2$  のとき

$$0 < n\alpha^n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2}{(n-1)h^2} \left( \because (1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2} h^2 \right)$$

$\cdots \textcircled{2}$

が成立し  $n \rightarrow \infty$  で  $(\textcircled{2}$  の最右辺)  $\rightarrow 0$  となるから, はさみうちの原

(1) 12点

$n=1$  のときを正しく示して…1点

二項定理を用いる方針…2点

$n \geq 2$  のときを正しく示して…3点

$\alpha = \frac{1}{1+h}$  とする方針(とり得る値の議論はなくても可)

…2点

不等式評価できて…2点

理より  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n = 0$  が成立する。

(証明終)

(1)[別解 1]

( $n=1$  のとき同様)

$n$  を 2 以上の自然数とし、実数全体を定義域とする関数

$$g(x) = (1+x)^n - \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

に対して、

$$h > 0 \text{ ならば } g(h) > 0$$

となることを示す。

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n(n-1)x$$

$$g''(x) = n(n-1)\{(1+x)^{n-2} - 1\} \quad (n \geq 2)$$

より、 $h > 0$  ならば

$$\therefore g''(h) = n(n-1)\{(1+h)^{n-2} - 1\} \geq 0$$

となる。よって  $g'(x)$  は  $x > 0$  の範囲で  $x$  の増加に伴い減少しないから、

$$g'(h) \geq g'(0) = n > 0$$

となる。これより  $g(x)$  は  $x > 0$  の範囲で  $x$  の増加に伴い増加するから、

$$g(h) > g(0) = 1 > 0$$

となる。したがって、

$$h > 0 \text{ ならば } g(h) > 0$$

となるから

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \quad (h > 0) \quad \dots \textcircled{3}$$

が成立する。

次に  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n = 0$  ( $0 < \alpha < 1$ ) を示す。自然対数をとると

$$\begin{aligned} \log(n\alpha^n) &= \log n + n \log \alpha \\ &= n \left( \frac{\log n}{n} + \log \alpha \right) \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n = 0$  を示す

..2点

(1) [別解 1] 12点

$n=1$  のときを正しく示して..1点

$g'(x)$  の  $x > 0$  における (広義) 単調増加性を示す..1点

$g(x)$  の  $x > 0$  における (狭義) 単調増加性を示す..1点

不等式③を示す

..3点

となる。ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{e^t \rightarrow \infty} \frac{\log e^t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t}$  と変形でき、③にお

いて、 $n = t > 0, h = 1$  とした結果を利用して、

$$0 < \frac{t}{e^t} < \frac{t}{2^t} < \frac{2}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

となる。また、 $0 < \alpha < 1$  において  $\log \alpha < 0$  であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n\alpha^n) &= -\infty \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(1)[別解 2]

数学的帰納法により、全ての自然数  $n$  について

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2} h^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$(1+h)^n > nh \quad \dots \textcircled{5}$$

が成立することを示す。

[1]  $n = 1$  のとき

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{の左辺} = (1+h)^1 = 1+h$$

$$\textcircled{4} \text{の右辺} = 0$$

$$\textcircled{5} \text{の右辺} = h$$

より、不等式④、⑤が成立する。

[2]  $n = k$  ( $k$  は自然数) のとき

$$(1+h)^k > kh$$

が成立すると仮定すると

$$(1+h)^k + h > kh + h = (k+1)h$$

が成立し

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} - \{(1+h)^k + h\} &= (1+h)^k \{(1+h) - 1\} - h \\ &= h \{(1+h)^k - 1\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0 \text{ を示す}$$

・・2点

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n\alpha^n) = -\infty$$

を示す・・2点

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n = 0 \text{ を示す}$$

・・2点

(1) [別解 2] 12点

$n = 1$  のときを正しく示して・・1点

$$\therefore (1+h)^{k+1} > (1+h)^k + h > (k+1)h$$

より  $n = k+1$  で不等式⑤が成立する。また、

$$(1+h)^k > \frac{k(k-1)}{2}h^2$$

が成立すると仮定すると

$$(1+h)^k + kh^2 > \frac{k(k-1)}{2}h^2 + kh^2$$

$$\Leftrightarrow (1+h)^k + kh^2 > \frac{k(k+1)}{2}h^2$$

が成立し

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} - \{(1+h)^k + kh^2\} &= (1+h)^k \{(1+h) - 1\} - kh^2 \\ &= h \{(1+h)^k - kh\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (1+h)^{k+1} > (1+h)^k + kh^2 > \frac{k(k+1)}{2}h^2$$

より  $n = k+1$  で不等式④が成立する。

以上[1], [2]より全ての自然数  $n$  について、不等式④, ⑤が成立する。

(以下  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n = 0$  の証明は本解に準ずる)

(2)

以下、 $n \geq 2$  のときを考える。

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\cos^{k+1}\theta + \cos\theta \\ &= \sum_{k=1}^n k\cos^k\theta \end{aligned}$$

と変形できる。

$$\begin{aligned} a_n &= \cos\theta + 2\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cdots + n\cos^n\theta \\ \cos\theta a_n &= \cos^2\theta + 2\cos^3\theta + \cdots + (n-1)\cos^n\theta + n\cos^{n+1}\theta \end{aligned}$$

より辺々を引いて

$$\begin{aligned} (1-\cos\theta)a_n &= \sum_{k=1}^n \cos^k\theta - n\cos^{n+1}\theta \\ \therefore a_n &= \frac{1}{1-\cos\theta} \left( \sum_{k=1}^n \cos^k\theta - n\cos^{n+1}\theta \right) (\because 1-\cos\theta \neq 0) \end{aligned}$$

⑤を示す(方法は問われない)・・・2点

④を数学的帰納法で示す・・・3点

(以下・・・6点)

(2) 10点

$$a_n = \sum_{k=1}^n k\cos^k\theta \quad \text{と}$$

書き換えて・・・2点

$a_n$  を極限が示せる形まで処理できて(採点基準下部の注参照)・・・2点

を得る。ここで  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より  $0 < \cos \theta < 1$  であるから無限等比級数

の公式と(1)の結果を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \cos^k \theta = \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos^{n+1} \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (n+1) \cos^{n+1} \theta = 0$$

となるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\cos \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \quad \dots \text{(答)}$$

となる。

(3)

(2)で得られた極限值を用いて

$$\begin{aligned} f(\theta)\theta^m &= \frac{\theta^m \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\theta^m \cos \theta}{\left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2} \\ &= 2^{m-2} \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^m}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \cos \theta \end{aligned}$$

となる。  $m < 4 \Leftrightarrow 4 - m > 0$  のとき

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} f(\theta)\theta^m = \lim_{\theta \rightarrow +0} 2^{m-2} \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)^4 \frac{1}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^{4-m}} \cos \theta = \infty$$

となり発散する。  $m = 4$  のとき

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} f(\theta)\theta^m = \lim_{\theta \rightarrow +0} 4 \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)^4 \cos \theta = 4$$

となるため、求める  $m$  の最小値は 4 で、このとき求める極限は 4 に収束する。  $\dots$  (答)

(1)の結果の利用  
(1)で示せていなくても可)  $\dots$  2点

答  $\dots$  4点

(3) 8点

$\frac{0}{0}$  の不定形の解消  
(採点基準下部の参照)  $\dots$  2点

$m < 4$  で発散すること  
に言及  $\dots$  2点

$m = 4$  で収束すること  
に言及  $\dots$  2点

極限値が 4  $\dots$  2点

(2)[注]  $\sum_{k=1}^n k\alpha^k$  の計算方法について





$$\begin{aligned} f(\theta)\theta^m &= \frac{\theta^m \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\theta^m \cos \theta (1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2 (1 + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\theta^m \cos \theta (1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos^2 \theta)^2} \\ &= \frac{\theta^m}{\sin^4 \theta} \cos \theta (1 + \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

としてもよい。

## 5. (30点)

### 【解答・採点基準】

(1)

$x(2-t)$ ,  $y(2-t)$  をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} x(2-t) &= -4\left(|2-t-1| - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= -4\left(|-t+1| - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= -4\left(|t-1| - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(2-t) &= \frac{2-t-1}{(2-t)^2 - 2(2-t) - 3} \\ &= \frac{-t+1}{t^2 - 2t - 3} \\ &= -y(t) \end{aligned}$$

となるから,  $x(2-t) = x(t)$ ,  $y(2-t) = -y(t)$  が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)より,  $C$  の  $1 \leq t \leq 2$  の部分は  $0 \leq t \leq 1$  の部分と  $x$  軸に関して対称であるから,  $0 \leq t \leq 1$  の部分について調べればよい。  $0 \leq t \leq 1$  のとき,  $t-1 \leq 0$  であるから,

$$\begin{aligned} x(t) &= -4\left(1-t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= -4\left(-t + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= -4t^2 + 4t \end{aligned}$$

である。  $x(t)$ ,  $y(t)$  をそれぞれ  $t$  で微分すると,

(1) 4点

$x(2-t) = x(t)$  を示す・・・2点

$y(2-t) = -y(t)$  を示す・・・2点

(2) 12点

対称性の利用

・・・2点

(利用しない場合は増減表で得点調整)

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -8t + 4 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{(t^2 - 2t - 3) - (t-1)(2t-2)}{(t^2 - 2t - 3)^2} \\ &= \frac{-t^2 + 2t - 5}{(t^2 - 2t - 3)^2} \\ &= \frac{-(t-1)^2 - 4}{(t^2 - 2t - 3)^2}\end{aligned}$$

となる。  $0 \leq t \leq 1$  かつ  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$  を満たす  $t$  は

$$\begin{aligned}-8t + 4 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であり、また、  $\frac{dy(t)}{dt} < 0$  である。したがって、  $0 \leq t \leq 1$  の範囲で、

$(x(t), y(t))$  は  $t$  の値の変化に対して以下のように変化する。

$t$	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$\frac{dx(t)}{dt}$		+	0	-	
$\frac{dy(t)}{dt}$		-	-	-	
$(x(t), y(t))$	$(0, \frac{1}{3})$	↘	$(1, \frac{2}{15})$	↙	(0, 0)

以上より、  $1 \leq t \leq 2$  の部分も合わせて  $C$  の概形は以下のようになる。

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$  を求める

(正しい計算結果に

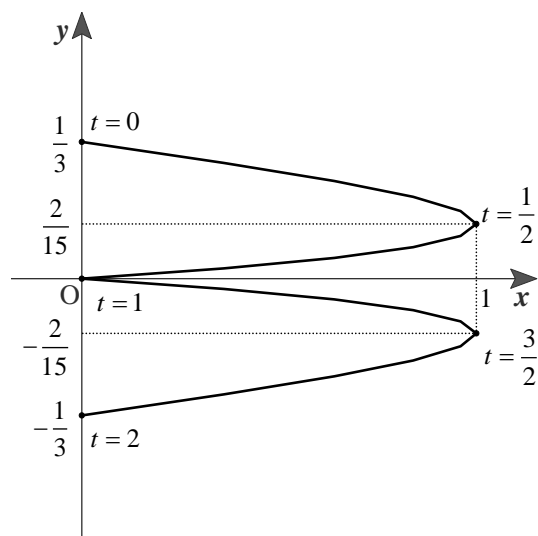
加点) ..4点

(各2点×2)

増減表..3点

(対称性を利用して

いない場合は5点)



(答) 上図

(3)

$C$  は  $x$  軸に関して対称であるから、 $C$  と  $y$  軸によって囲まれる図形のうち  $y \geq 0$  の部分の面積を求めて2倍すればよい。 $C$  の  $0 \leq t$

$\leq \frac{1}{2}$  の部分を  $y = y_1(x)$ 、 $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  の部分を  $y = y_2(x)$  と表すとす

ると、 $y \geq 0$  の部分の面積は

$$\frac{S}{2} = \int_0^1 y_1(x) dx - \int_0^1 y_2(x) dx \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。ここで①の各項の定積分の積分範囲は以下のように  $t$  と対応する。

$x$	0	→	1
第1項の定積分の $t$	0	→	$\frac{1}{2}$
第2項の定積分の $t$	1	→	$\frac{1}{2}$

したがって、①は

概形の図示・・・3点

( $t$  の値を図中に記

入していなくても

減点しない)

(3) 14点

面積の立式・・・2点

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} y_1(x) \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 y_2(x) \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^1 y(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t-1}{t^2-2t-3} \cdot (-8t+4) dt \\ &= -4 \int_0^1 \frac{(t-1)(2t-1)}{t^2-2t-3} dt \\ &= -4 \int_0^1 \left( 2 + \frac{t+7}{t^2-2t-3} \right) dt \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t^2-2t-3=(t+1)(t-3)$ より、ある実数  $A, B$  を用いて

$$\frac{t+7}{t^2-2t-3} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-3} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表すことを考える。②の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-3} &= \frac{A(t-3)+B(t+1)}{(t+1)(t-3)} \\ &= \frac{(A+B)t-3A+B}{(t+1)(t-3)} \end{aligned}$$

となるから、②が成り立つとき、

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+B=7 \end{cases}$$

$$\therefore A = -\frac{3}{2}, B = \frac{5}{2}$$

である。したがって、 $y \geq 0$ の部分の面積は

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= -4 \int_0^1 \left( 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t-3} \right) dt \\ &= -4 \left[ 2t - \frac{3}{2} \log|t+1| + \frac{5}{2} \log|t-3| \right]_0^1 \\ &= -4 \left\{ \left( 2 - \frac{3}{2} \log 2 + \frac{5}{2} \log 2 \right) - \frac{5}{2} \log 3 \right\} \\ &= -8 - 4 \log 2 + 10 \log 3 \end{aligned}$$

と求められ、求める面積  $S$  は

$$S = -16 - 8 \log 2 + 20 \log 3 \quad \dots \text{(答)}$$

である。

(3)[別解 1]

置換積分(左式1行目)・・・2点

左式5行目・・・2点

部分分数分解をする方針・・・2点

$A, B$ を求める  
・・・2点(完答)

原始関数を求める  
・・・2点

答・・・2点

(3)[別解 1] 14点

$$\left(\frac{S}{2} = -4 \int_0^1 \left(2 + \frac{t+7}{t^2-2t-3}\right) dt \text{ と変形するところまで本解と同じ}\right)$$

ここで、 $t^2-2t-3=(t-1)^2-4$  より、 $t-1=2\sin\theta$  と置換すると、

$$\frac{dt}{d\theta} = 2\cos\theta \text{ が成り立ち、積分範囲は以下のように対応する。}$$

$t$	0	→	1
$\theta$	$-\frac{\pi}{6}$	→	0

よって、

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{t+7}{t^2-2t-3} dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{2\sin\theta+8}{4\sin^2\theta-4} \cdot \frac{dt}{d\theta} d\theta \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{2\sin\theta+8}{4\cos^2\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\sin\theta+4}{\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \left( \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{4\cos\theta}{\cos^2\theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \left( \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{4\cos\theta}{1-\sin^2\theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \left\{ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{4\cos\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} \right\} d\theta \\ &= \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \left( \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{2\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \left\{ \frac{-(\cos\theta)'}{\cos\theta} - \frac{2(1-\sin\theta)'}{1-\sin\theta} + \frac{2(1+\sin\theta)'}{1+\sin\theta} \right\} d\theta \\ &= \left[ -\log|\cos\theta| - 2\log|1-\sin\theta| + 2\log|1+\sin\theta| \right]_0^{-\frac{\pi}{6}} \\ &= \left[ -\log|\cos\theta| + 2\log\left| \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \right| \right]_0^{-\frac{\pi}{6}} \\ &= -\log\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\log\frac{1}{3} \\ &= \log 2 - \frac{5}{2}\log 3 \end{aligned}$$

と計算でき、求める面積  $S$  は

(左式までの変形)

..6点(本解の採点基準に準じる)

$t-1=2\sin\theta$  と置換する方針..2点

原始関数を求める

..4点

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= -4[2t]_0^1 - 4\left(\log 2 - \frac{5}{2}\log 3\right) \\ &= -8 - 4\log 2 + 10\log 3\end{aligned}$$

$$\therefore S = 20\log 3 - 8\log 2 - 16 \quad \dots \text{(答)}$$

である。

(3)[別解 2]

$C$  は  $x$  軸に関して対称であるから、 $C$  と  $y$  軸によって囲まれる図形のうち  $y \geq 0$  の部分の面積を求めて 2 倍すればよい。 $y \geq 0$  の部分の面積は

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{1}{3}} x(t) dy \quad \dots \text{(※)}$$

と表せる。(※)の定積分の積分範囲は以下のように  $t$  と対応する。

$y$	0	→	$\frac{1}{3}$
$t$	1	→	0

したがって、(※)は

$$\frac{S}{2} = \int_1^0 x(t) \frac{dy(t)}{dt} dt$$

となる。ここで、 $y(t)$  は

$$y(t) = \frac{t-1}{(t+1)(t-3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-3} \right)$$

と変形できるから、

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-3)^2} \right\}$$

である。よって、求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_1^0 x(t) \frac{dy(t)}{dt} dt \\ &= \int_1^0 (-4t^2 + 4t) \cdot \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-3)^2} \right\} dt \\ &= 2 \int_1^0 \left\{ \frac{t^2 - t}{(t+1)^2} + \frac{t^2 - t}{(t-3)^2} \right\} dt\end{aligned}$$

答・・・2点

(3)[別解 2] 14点

面積の立式・・・2点

置換積分(左式)

・・・2点

$y(t)$  を部分分数分解して微分する

・・・2点

左式 3 行目・・・2点



$$\begin{aligned}
&= 2 \int_1^0 \left\{ \frac{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}{(t+1)^2} + \frac{(t-3)^2 + 5(t-3) + 6}{(t-3)^2} \right\} dt \\
&= 2 \int_1^0 \left\{ 2 - \frac{3}{t+1} + \frac{2}{(t+1)^2} + \frac{5}{t-3} + \frac{6}{(t-3)^2} \right\} dt \\
&= 2 \left[ 2t - 3 \log|t+1| - \frac{2}{t+1} + 5 \log|t-3| - \frac{6}{t-3} \right]_1^0 \\
&= 2 \cdot 5 \log 3 - 2(4 + 2 \log 2) \\
&= 10 \log 3 - 4 \log 2 - 8 \\
\therefore S &= 20 \log 3 - 8 \log 2 - 16 \quad \dots \text{(答)}
\end{aligned}$$

となる。

(3)[別解 3]

$\left(\frac{S}{2} = \int_1^0 x(t) \frac{dy(t)}{dt} dt\right)$  を導くところまで別解 2 と同じ)

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_1^0 x(t) \frac{dy(t)}{dt} dt \\
&= \int_1^0 (-4t^2 + 4t) \frac{-t^2 + 2t - 5}{(t^2 - 2t - 3)^2} dt \\
&= 4 \int_1^0 \frac{t^4 - 3t^3 + 7t^2 - 5t}{t^4 - 4t^3 - 2t^2 + 12t + 9} dt \\
&= 4 \int_1^0 \left\{ 1 + \frac{t^3 + 9t^2 - 17t - 9}{(t+1)^2 (t-3)^2} \right\} dt
\end{aligned}$$

となる。ここで、ある実数  $p, q, r, s$  を用いて

$$\frac{t^3 + 9t^2 - 17t - 9}{(t+1)^2 (t-3)^2} = \frac{p}{t+1} + \frac{q}{(t+1)^2} + \frac{r}{t-3} + \frac{s}{(t-3)^2}$$

と表すことを考える。このとき、

$$\begin{aligned}
&t^3 + 9t^2 - 17t - 9 \\
&= p(t+1)(t-3)^2 + q(t-3)^2 + r(t+1)^2(t-3) + s(t+1)^2 \\
&= (p+r)t^3 + (-5p+q-r+s)t^2 \\
&\quad + (3p-6q-5r+2s)t + (9p+9q-3r+s)
\end{aligned}$$

が成り立ち、

$$\begin{cases} p+r=1 \\ -5p+q-r+s=9 \\ 3p-6q-5r+2s=-17 \\ 9p+9q-3r+s=-9 \end{cases}$$

$$\therefore (p, q, r, s) = \left( -\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}, 3 \right)$$

被積分関数を部分  
分数分解する

..2点

原始関数を求める

..2点

答..2点

(3)[別解 3] 14点

(左式を導くところ  
まで)..4点(別解 2  
の採点基準に準じ  
る)

左式 4 行目..2点

部分分数分解する

方針..2点

$p, q, r, s$  を求める

..2点(完答)

である。したがって、求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= 4 \int_1^0 \left\{ 1 - \frac{3}{2(t+1)} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{5}{2(t-3)} + \frac{3}{(t-3)^2} \right\} dt \\ &= 4 \left[ t - \frac{3}{2} \log|t+1| - \frac{1}{t+1} + \frac{5}{2} \log|t-3| - \frac{3}{t-3} \right]_1^0 \\ &= 4 \cdot \frac{5}{2} \log 3 - 4(2 + \log 2) \\ &= 10 \log 3 - 4 \log 2 - 8 \\ \therefore S &= 20 \log 3 - 8 \log 2 - 16 \quad \dots \text{(答)}\end{aligned}$$

となる。

(3)[別解 4]

$(\frac{S}{2} = \int_1^0 x(t) \frac{dy(t)}{dt} dt$  を導くところまで別解 2 と同じ)

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_1^0 x(t) \frac{dy(t)}{dt} dt \\ &= \int_1^0 (-4t^2 + 4t) \frac{-t^2 + 2t - 5}{(t^2 - 2t - 3)^2} dt \\ &= 4 \int_1^0 \frac{t^4 - 3t^3 + 7t^2 - 5t}{(t^2 - 2t - 3)^2} dt \\ &= 4 \int_1^0 \left\{ \frac{t^2 - t + 8}{t^2 - 2t - 3} + \frac{8t + 24}{(t^2 - 2t - 3)^2} \right\} dt \\ &= 4 \int_1^0 \left\{ 1 + \frac{t + 11}{t^2 - 2t - 3} + \frac{8t + 24}{(t^2 - 2t - 3)^2} \right\} dt \\ &= 4 \int_1^0 \left\{ 1 + \frac{t - 1}{t^2 - 2t - 3} + \frac{8t - 8}{(t^2 - 2t - 3)^2} \right\} dt \\ &\quad + 4 \int_1^0 \frac{12}{t^2 - 2t - 3} dt + 4 \int_1^0 \frac{32}{(t^2 - 2t - 3)^2} dt \\ &= 4 \int_1^0 \left\{ 1 + \frac{t - 1}{t^2 - 2t - 3} + \frac{8t - 8}{(t^2 - 2t - 3)^2} \right\} dt \\ &\quad + 4 \int_1^0 \frac{12}{t^2 - 2t - 3} dt + 4 \int_1^0 \frac{32}{(t^2 - 2t - 3)^2} dt\end{aligned}$$

となる。第1項の定積分は

原始関数を求める

..2点

答..2点

(3)[別解 4] 14点

(左式を導くところまで)..4点(別解2の採点基準に準じる)

左式6行目..2点

$$\begin{aligned}
& 4 \int_1^0 \left\{ 1 + \frac{t-1}{t^2-2t-3} + \frac{8t-8}{(t^2-2t-3)^2} \right\} dt \\
&= 4 \int_1^0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(t^2-2t-3)'}{t^2-2t-3} + \frac{4(t^2-2t-3)'}{(t^2-2t-3)^2} \right\} dt \\
&= 4 \left[ t + \frac{1}{2} \log |t^2-2t-3| - \frac{4}{t^2-2t-3} \right]_1^0 \\
&= 4 \left\{ \left( \frac{1}{2} \log 3 + \frac{4}{3} \right) - \left( 2 + \frac{1}{2} \log 4 \right) \right\} \\
&= 2 \log 3 - 4 \log 2 - \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

と求められる。第2項と第3項の定積分について、

$t^2-2t-3=(t-1)^2-4$ より、 $t-1=2\sin\theta$ と置換すると、

$\frac{dt}{d\theta}=2\cos\theta$ が成り立ち、積分範囲は以下のように対応する。

$t$	1	→	0
$\theta$	0	→	$-\frac{\pi}{6}$

よって、定積分  $\int_1^0 \frac{1}{t^2-2t-3} dt$  は

$$\begin{aligned}
\int_1^0 \frac{1}{t^2-2t-3} dt &= \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(t-1)^2-4} \cdot \frac{dt}{d\theta} d\theta \\
&= \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4\sin^2\theta-4} \cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{-\frac{\pi}{6}} -\frac{1}{2\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} \left( \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^{-\frac{\pi}{6}} \left\{ \frac{(1+\sin\theta)'}{1+\sin\theta} - \frac{(1-\sin\theta)'}{1-\sin\theta} \right\} d\theta
\end{aligned}$$

第1項の定積分

..2点

$$= -\frac{1}{4} \left[ \log \left| \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{4} \log 3$$

と求められる。また、定積分  $\int_1^0 \frac{1}{(t^2 - 2t - 3)^2} dt$  は

$$\int_1^0 \frac{1}{(t^2 - 2t - 3)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\{(t-1)^2 - 4\}^2} \cdot \frac{dt}{d\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\{4\sin^2 \theta - 4\}^2} \cdot 2\cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{8\cos^3 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos \theta} \cdot (\tan \theta)' d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \left[ \frac{\tan \theta}{\cos \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)' \tan \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{12} - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin \theta (\cos \theta)'}{\cos^3 \theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{12} - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{1}{2\cos^2 \theta} \right)' \sin \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{12} - \frac{1}{8} \left[ \frac{\sin \theta}{2\cos^2 \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin \theta)'}{2\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\cos \theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{24} - \frac{1}{32} \log 3$$

と求められる。なお、 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\cos \theta} d\theta = -\frac{1}{4} \log 3$  を求めるにあたって

は第2項の定積分の計算結果を利用した。したがって、求める面積  $S$  は

$$\frac{S}{2} = 2\log 3 - 4\log 2 - \frac{8}{3} + 48 \cdot \frac{1}{4} \log 3 + 128 \left( -\frac{1}{24} - \frac{1}{32} \log 3 \right)$$

$$= 10\log 3 - 4\log 2 - 8$$

$$\therefore S = 20\log 3 - 8\log 2 - 16 \quad \dots \text{(答)}$$

である。

## 第2項の定積分

..2点

## 第3項の定積分

..2点

答..2点

(2)[注]

対称性を利用しない場合、 $C$  の  $1 \leq t \leq 2$  の部分について、

$$\begin{aligned}x(t) &= -4\left(t-1-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= -4t^2 + 12t - 8\end{aligned}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -8t + 12$$

であり、増減表は以下のようになる。

$t$	1	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$\frac{dx(t)}{dt}$		+	0	-	
$\frac{dy(t)}{dt}$		-	-	-	
$(x(t), y(t))$	$(0, 0)$	$\searrow$	$\left(1, -\frac{2}{15}\right)$	$\swarrow$	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$