

## 2020 年第 2 回一橋大模試

### 採点基準 数学

#### 1 (50 点満点)

(1) (配点 25 点)

- 数学的帰納法を用いる方針に 5 点
- $n=3$ での成立を確認して 5 点
- $n=k$ の仮定の下で  $n=k+1$ での成立を導いて 10 点
- 正しく証明を完了して 5 点

(1)[別解 1] (配点 25 点)

- 二項定理を用いる方針に 5 点
- $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$ に 10 点
- 正しく証明を完了して 10 点

(1)[別解 2] (配点 25 点)

- $f(n) = 2^{n-1} - n$ の最小値を考える方針に 5 点
- $f(n+1) > f(n)$ を示して 10 点
- $f(n)$ の最小値に 5 点
- 正しく証明を完了して 5 点

(2) (配点 25 点)

- $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \leq n$ を導いて 8 点
- 背理法を用いる方針に 5 点
- 矛盾を導く過程に 7 点
- 正しく証明を完了して 5 点

(2)[別解 1] (配点 25 点)

- 背理法を用いる方針に 5 点
- $1 \leq \frac{n}{2^{n-1}}$ を導いて 10 点
- 矛盾を導き証明を完了して 10 点

(2)[別解 2] (配点 25 点)

- 2 以上の自然数  $a, b$  について  $ab \geq a+b$  ( $a=b$  で等号成立) を示して 8 点
- 背理法を用いる方針に 5 点
- 矛盾を導く過程に 7 点
- 正しく証明を完了して 5 点

## 2 (50 点満点)

(1) (配点 10 点)

- 正しく答えを求めて 10 点(完答)

(2) (配点 15 点)

- 外接円の半径を正しく求めて 5 点
- 外接円の中心の  $x$ 座標を正しく求めて 5 点
- 外接円の中心の  $y$ 座標を正しく求めて 5 点

(3) (配点 25 点)

- 領域を図示することで把握して 8 点
- 直線  $y = 2x - k$  が円  $C$  と接するような  $k$  のうち大きい方を求めて 8 点
- 接点は斜線部の境界上にあることを正しく示して 9 点

**3 (50 点満点)**

- $a \leq 0$  のときの  $M$  を求めて 8 点
- $0 < a < \frac{1}{3}$  のときの  $M$  を求めて 16 点
- $\frac{1}{3} \leq a < 1$  のときの  $M$  を求めて 8 点
- $1 \leq a$  のときの  $M$  を求めて 8 点
- $M$  の最小値を求めて 10 点

#### 4 (50 点満点)

(1) (配点 20 点)

- $\overline{AD} = p\overline{AB} + q\overline{AC}$  (始点は点 B または点 C でも可) もしくは  $\overline{OD} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} + \gamma\overline{OC}$  という形で表して 5 点
- $x, y, z$  の各成分を計算し, 方程式を導いて 6 点
- 方程式を連立して解いて 5 点
- 答に 4 点

(2) (配点 30 点)

- 4 点を頂点とする四面体が存在するときの  $t$  の条件を示して 3 点
- $\overline{AH} = m\overline{AB} + n\overline{AC}$  (始点は点 B または点 C でも可) もしくは  $\overline{OH} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} + \gamma\overline{OC}$  という形で表して 5 点
- $\overline{DH}$  の各成分を  $t$  および  $m, n$  (もしくは  $\alpha, \beta, \gamma$ ) を用いて表して 2 点
- $\overline{DH} \cdot \overline{AB} = 0$  および  $\overline{DH} \cdot \overline{AC} = 0$  を計算して 4 点
- 方程式を連立して解き,  $m, n$  (もしくは  $\alpha, \beta, \gamma$ ) を  $t$  を用いて表して 6 点
- $m, n$  (もしくは  $\alpha, \beta, \gamma$ ) に関する条件を,  $t$  に関する条件に読み替えて 6 点
- 答に 4 点

## 5 (50 点満点)

(1) (配点 20 点)

- すべて同じ数字のときに不適であることを示して 3 点
- すべて同じ色のときに不適であることを示して 3 点
- 得点が 4 点となる数字と色の組み合わせを 2 通り挙げて 8 点(各 4 点×2)
- 確率を正しく求めて 6 点

(2) (配点 30 点)

- 1 点から 12 点までの数字と色の組み合わせを正しく列挙して 10 点
- 1 点から 12 点までの場合の数を求めて 10 点
- $\sum_{x=m}^M x \cdot P(x)$  を求めて 10 点